Sur les ondes de Stokes et une conjecture de Levi-Civita

B. Buffoni *   E. N. Dancer †   J.F. Toland ‡

Abstract

In his work [5] on Stokes waves (stationary periodic gravity-waves), Levi-Civita conjectured that, for any given propagation speed $c > 0$, the wave-lengths are not larger than $2\pi c^2/g$, where $g > 0$ is the acceleration due to gravity. We state a result on the existence of Stokes waves with arbitrarily large wave-lengths that shows no such upper-bound on the wavelength exists, and therefore that Levi-Civita's conjecture is false (see [2] for a complete proof). These long waves arise by way of sub-harmonic bifurcations. This vindicates numerical results of Saffman [7] and complements the analysis of Baesens and MacKay [1].

Résumé

Dans son travail [5] sur les ondes de Stokes (ondes gravitationnelles, périodiques et permanentes à la surface d'un liquide), Levi-Civita a émis la conjecture que, pour une vitesse de propagation $c > 0$ donnée, la longueur d'onde est bornée par $2\pi c^2/g$, où $g > 0$ est l'accélération gravitationnelle. Nous annonçons un résultat qui assure l'existence de vagues périodiques dont les longueurs d'onde sont arbitrairement grandes, ce qui montre qu'une telle majoration (même par une constante plus grande) est impossible, et donc que la conjecture est fausse (voir [2] pour une preuve complète). Ces ondes longues sont crées par des bifurcations sous-harmoniques. Ceci confirme les simulations numériques de Saffman [7] et offre un complément rigoureux à l'analyse de Baesens et MacKay [1].

*Department of Mathematical Sciences, University of Bath, Bath BA2 7AY, UK. bb1@maths.bath.ac.uk

†School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, Sydney NSW 2006, Australia. dancer_n@maths.su.oz.au

‡Department of Mathematical Sciences, University of Bath, Bath BA2 7AY, UK. jft@maths.bath.ac.uk

1 Formulation variationnelle et régularité des points critiques

Le problème des ondes de Stokes périodiques et symétriques, à la surface d'un liquide sans tension superficielle et de profondeur infinie, dépend d'un seul paramètre $\lambda = g\Lambda/(\pi c^2) > 0$, où $\Lambda > 0$ est la demi-longueur d'onde, et est décrit mathématiquement comme suit: trouver les points critiques par rapport à w de la fonctionnelle non linéaire

$$\mathcal{J}(\lambda, w) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{w\mathcal{C}w' - \lambda w^2(1 + \mathcal{C}w')\}dt,$$

où w appartient à l'espace X des fonctions réelles dans $H^1_{loc}(\mathbb{R})$ qui sont paires et 2π-périodiques. La fonction $\mathcal{C}w' \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ est la *conjuguée* de w' au sens de la théorie de Fourier, c'est à dire $\mathcal{C}w'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \cos nt$ si $w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt$. Plus généralement,

$$\mathcal{C}\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n \cos nt + b_n \sin nt\} = \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \sin nt - b_n \cos nt\}$$

si les séries convergent dans $L^2(-\pi, \pi)$. Clairement l'opérateur de conjugaison $w \to \mathcal{C}w$ préserve les espaces de Sobolev $H^m_{loc}(\mathbb{R}) = W^{m,2}_{loc}(\mathbb{R})$ pour $m \in \mathbb{N}$, et l'opérateur $w \to \mathcal{C}w'$ est autoadjoint dans $L^2(-\pi, \pi)$. Cette formulation variationnelle est nouvelle pour les ondes de Stokes périodiques, mais une fonctionnelle analogue à $\mathcal{J}(\lambda, w)$ a été introduite précédemment par Plotnikov [6] dans le cadre de son étude des ondes solitaires et de leurs bifurcations.

La fonctionnelle $\mathcal{J}(\lambda, w)$ est bien définie pour $w \in X$ et est analytique-réelle par rapport à ses deux arguments (elle est de fait polynomiale). Les points critiques satisfont à l'équation d'Euler-Lagrange

$$F(\lambda, w) := \mathcal{C}w' - \lambda\{w + w\mathcal{C}w' + \mathcal{C}(ww')\} = 0.$$

Cette équation est similaire à un problème quasi-linéaire car elle est linéaire en w' avec des "coefficients" qui dépendent de w (le terme "coefficient" est légèrement ambigu car il pourrait suggérer que l'équation est locale). La première proposition que nous énonçons assure une propriété de compacité et de régularité.

Proposition 1. *Pour $1 < p < \infty$, l'opérateur non linéaire*

$$X \ni w \to G(w) = w\mathcal{C}w' - \mathcal{C}(ww') \in L^p_{per}(\mathbb{R})$$

est séquentiellement continu de la topologie faible de X dans la topologie forte de $L^p_{per}(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions 2π-périodiques appartenant à $L^p_{loc}(\mathbb{R})$.

De plus G envoie $X \cap W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R})$ dans $C^{1-2/p}(\mathbb{R})$ si $2 < p < \infty$, et $X \cap C^{m+\alpha}(\mathbb{R})$ dans $C^{m+\delta}(\mathbb{R})$ si $0 < \delta < \alpha < 1$ et $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, où $C^{m+\alpha}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions m fois continûment différentiables dont les m-ième dérivees sont Hölder-continues d'indice α.

On obtient le corollaire suivant:

Corollaire 2. *Si* $(\lambda, w) \in (0,\infty) \times X$ *satisfait* $F(\lambda, w) = 0$ *et* $\max w < (2\lambda)^{-1}$, *alors la fonction* w *est analytique-réelle. De plus, pour autant qu'elle soit injective, l'application* $\mathbb{R} \ni t \to (t + \mathcal{C}w(t), w(t)) \in \mathbb{R}^2$ *décrit la surface d'une onde périodique permanente dans des coordonnées sans dimensions physiques. Si la période minimale de* w *est* $P > 0$, *la longueur d'onde de la vague périodique correspondante en coordonnées physiques vaut* $Pc^2\lambda/g$.

Le cas $\max w = (2\lambda)^{-1}$, exclu du corollaire, correspond à une *onde de Stokes d'hauteur maximale* [8], qui se caractérise par l'existence à la surface de points de stagnation où la pente peut être discontinue.

2 Structure de l'ensemble des points critiques

Soit $U \subset \mathbb{R} \times X$ l'ensemble des couples (λ, w) tels que $\lambda > 0$, $w \not\equiv 0$, w est décroissante sur $[0,\pi]$, $\max w < (2\lambda)^{-1}$ et l'application $\mathbb{R} \ni t \to (t + \mathcal{C}w(t), w(t)) \in \mathbb{R}^2$ est injective. Notons que w est de période minimale 2π, $w(0)$ est la hauteur de la crête, $w(\pi)$ est le minimum de l'élévation de l'onde et $w(\pi + t) \equiv w(\pi - t)$. Le théorème suivant résulte de l'analyticité-réelle de l'opérateur F et de la théorie locale de bifurcation pour des opérateurs qui sont gradients d'une fonctionnelle (voir par exemple [4, 6]).

Théorème 3. *Il existe une fonction continue* $h = (\widetilde{\lambda}, \widetilde{w}) : (0,\infty) \to (0,\infty) \times X$ *telle que*

1. $h(0,\infty) \subset U$ *et* $F \circ h \equiv 0$;
2. $\lim_{s\to 0} h(s) = (1, 0)$;
3. $0 < \left(2\widetilde{\lambda}(s)\right)^{-1} - \{\max \widetilde{w}\}(s) \to 0$ *lorsque* $s \to \infty$ *et*
$$0 < \liminf_{s\to\infty} \widetilde{\lambda}(s) < \limsup_{s\to\infty} \widetilde{\lambda}(s) < \infty;$$
4. *l'ensemble* D *des valeurs de* $s > 0$ *pour lesquelles* $\widetilde{w}(s)$ *est un point critique dégéneré de* $\mathcal{J}(\widetilde{\lambda}(s), \cdot)$ *n'admet aucun point d'accumulation dans* $[0,\infty)$;
5. $h|_{(0,\infty)\setminus D}$ *est injectif;*
6. *en tout* $s \notin D$, h *est analytique-réelle avec une dérivée non nulle, et, localement près de* $s \in D$, h *peut être reparamétrisée en une application analytique-réelle, la dérivée pouvant cette fois s'anuller;*
7. *l'indice de Morse de* $\mathcal{J}(\widetilde{\lambda}(s), \cdot)$ *en* $\widetilde{w}(s)$ *tend vers l'infini lorsque* $s \to \infty$;
8. *l'ensemble* D *contient une infinité de valeurs* $s > 0$ *telles que* $h(s)$ *est un point de rebroussement ou un point de bifurcation (les définitions suivent).*

Pour $s > 0$, nous disons que $h(s)$ est un point de *rebroussement* si $h(\widehat{s}) = h(s)$ pour $\widehat{s} > 0$ implique $\widehat{s} = s$ et si, localement près de s, $\widetilde{\lambda}$ n'est pas injectif, et que $h(s)$ est un point de *bifurcation* s'il existe $\epsilon > 0$ tel que tout voisinage de $h(s)$ contient une solution de $F = 0$ qui n'est pas dans $h([s-\epsilon, s+\epsilon])$. L'assertion 2 s'interprétant comme un résultat de bifurcation de petites solutions à partir de la branche triviale $\{(\lambda, 0); \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \in X\}$, les éventuelles bifurcations de l'assertion 8 peuvent être qualifiées de *secondaires*.

L'existence d'un ensemble connexe de solutions qui bifurque de la branche triviale est une conséquence de la théorie topologique de bifurcation globale (voir [9] pour des références). L'application h en sélectionne un sous-ensemble constitué essentiellement (voir l'assertion 4) de solutions non dégénérées formant localement une variété analytique-réelle de dimension 1 (assertion 6). Nous donnons dans [2] un résultat abstrait, dans l'esprit de l'article de Dancer [3], qui assure l'existence de h.

L'assertion 3 exprime le fait que les vagues $\widetilde{w}(s)$ s'approchent d'une onde de Stokes d'hauteur maximale lorsque $s \to \infty$. Ce phénomène est bien compris et nous renvoyons à [9] pour plus d'informations.

L'assertion 7 est due à Plotnikov dans le cadre des ondes solitaires à la surface d'un liquide de profondeur finie.

L'assertion 8 se démontre comme suit. De l'assertion 7, on déduit facilement qu'il existe un nombre infini de valeurs de $s > 0$ pour lesquelles l'indice de Morse de $\mathcal{J}(\widetilde{\lambda}(s), \cdot)$ en $\widetilde{w}(s)$ est discontinu. Pour une telle valeur de $s > 0$, si $h(s)$ n'est pas un point de rebroussement, la théorie de bifurcation locale pour des opérateurs gradients garantit que $h(s)$ est un point de bifurcation.

Appliquée aux ondes de Stokes périodiques, la méthode de Plotnikov n'établit l'existence de $h(s)$ que pour s dans $(0, \min D]$ et elle n'exclut pas la possibilité que $h(s)$ pour $s > \min D$ “se perde” dans un ensemble connexe de solutions dégénérées inclus dans $\{\min D\} \times X$.

Le calcul numérique (voir [1] et les références citées) encourage à croire que h décrit toutes les solutions dans U et que l'ensemble $h(D)$ n'a aucun point de bifurcation secondaire. La situation devient bien plus complexe lorsque l'on considère la possibilité de bifurcations sous-harmoniques, c'est à dire de bifurcations qui apparaissent lorsque l'on plonge l'espace X dans des espaces de fonctions périodiques de périodes plus grandes.

Pour $q \geq 2$, soit X_q l'espace des fonctions réelles dans $H^1_{loc}(\mathbb{R})$ qui sont paires et $2q\pi$-périodiques. L'espace X est un sous-espace de X_q et l'opérateur non linéaire F s'étend d'une manière naturelle en un opérateur

$$F_q(\lambda, w) := \mathcal{C}_q w' - \lambda\{w + w\mathcal{C}_q w' + \mathcal{C}_q(ww')\} = 0,\ \ \lambda > 0,\ \ w \in X_q,$$

en utilisant la définition

$$\mathcal{C}_q \sum_{n=0}^{\infty}\{a_n \cos(nt/q) + b_n \sin(nt/q)\} = \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \sin(nt/q) - b_n \cos(nt/q)\}$$

si les séries convergent dans $L^2(-q\pi, q\pi)$. L'équation $F_q = 0$ donne les points critiques par rapport à $w \in X_q$ de la fonctionnelle

$$\mathcal{J}_q(\lambda, w) = \frac{1}{2} \int_{-\pi q}^{\pi q} \{w\mathcal{C}_q w' - \lambda w^2(1 + \mathcal{C}_q w')\} dt, \ \lambda > 0, \ w \in X_q.$$

Le Corollaire 2 reste alors valable si l'on remplace X, $\mathcal{C}$ et F par X_q, $\mathcal{C}_q$ et F_q. Notre résultat principal est le suivant:

Théorème 4. *Soit $h = (\widetilde{\lambda}, \widetilde{w}) : (0, \infty) \to \mathbb{R} \times X$ donné par le Théorème 2. Quelque soit $s_1 > 0$, on peut choisir $s_2 > s_1$ et un entier $Q \geq 2$ tels que, pour tout $q \geq Q$, il existe $s(q) \in (s_1, s_2)$ avec la propriété que tout voisinage de $h(s(q))$ dans $\mathbb{R} \times X_q$ contient une solution de $F_q = 0$ qui n'appartient pas à $\mathbb{R} \times X$. De plus l'ensemble $\{s(q) : q \geq Q\}$ est infini.*

Lorsque q est un nombre premier, les solutions dans $X_q \backslash X$ correspondent, pour une vitesse $c > 0$ donnée, à des ondes périodiques dont les longueurs d'onde tendent vers l'infini lorsque $q \to \infty$. Ceci contredit la conjecture de Levi-Civita.

Si l'on choisit dans le théorème $q = 2^k \geq Q$ avec $k \in \mathbb{N}$, les solutions obtenues dans $X_q \backslash X$ ont leurs périodes minimales dans $4\pi\mathbb{N}$, et chacune de ces solutions a deux crêtes (points d'élévation localement maximale) par période par rapport auxquelles la solution est symétrique.

Nous esquissons la preuve du théorème 4. Pour $q \geq 2$ grand, on considère $h : (0, \infty) \to \mathbb{R} \times X \subset \mathbb{R} \times X_q$ comme une application à valeurs dans $\mathbb{R} \times X_q$. Le point crucial est de remarquer que l'indice de Morse de $\mathcal{J}_q(\widetilde{\lambda}(s), \cdot)$ en $\widetilde{w}(s)$ croît bien plus rapidement que celui de $\mathcal{J}(\widetilde{\lambda}(s), \cdot)$ lorsque $s \to \infty$. Ceci s'obtient par l'étude du spectre d'une famille d'opérateurs non locaux, qui s'inspire de la théorie spectrale des opérateurs différentiels à coefficients périodiques. La seconde observation importante, basée sur des arguments d'analyticité, est que les points $s > 0$ de discontinuité de l'indice de Morse de $\mathcal{J}_q(\widetilde{\lambda}(s), \cdot)$ en $\widetilde{w}(s)$ ne peuvent pas être tous dans D (introduit au théorème 3). On déduit alors l'existence de bifurcations sous-harmoniques en appliquant la théorie locale de bifurcation pour des opérateurs gradients à l'équation $F_q = 0$.

Nous pouvons refaire l'analyse précédente avec une définition différente de l'ensemble U. Soit maintenant $U \subset \mathbb{R} \times X$ l'ensemble des couples (λ, w) tels que $\lambda > 0$, $w \not\equiv 0$, w est *croissante* sur $[0, \pi]$, $\max w < (2\lambda)^{-1}$ et l'application $\mathbb{R} \ni t \to (t + \mathcal{C}w(t), w(t)) \in \mathbb{R}^2$ est injective. Alors w est de période minimale 2π, $w(\pi)$ est la hauteur de la crête, $w(0)$ est le minimum de l'élévation de l'onde et $w(\pi + t) \equiv w(\pi - t)$. Comme ceci correspond simplement à un autre choix de l'origine de $\mathbb{R}$, le théorème 3 reste valable. La preuve du théorème 4 reste correcte avec la nouvelle définition de U, mais le théorème 4 nous apprend quelque chose de nouveau dans ce cas. En effet, si l'on choisit $q = 2^k \geq Q$ avec $k \in \mathbb{N}$, les solutions obtenues dans $X_q \backslash X$ sont symétriques cette fois par rapport à deux creux (points d'élévation localement minimale) par période et ne sont symétriques par rapport à aucune crête.

References

[1] C. Baesens and R. S. MacKay, *Uniformly travelling water waves from a dynamical systems viewpoint : some insight into bifurcations from Stokes' family*, J. Fluid Mech. **241** (1992), 333–347.

[2] B. Buffoni, E. N. Dancer, and J. F. Toland, *A variational theory of Stokes waves and their sub-harmonic bifurcations*, prépublication (accessible anonymement par ftp.maths.bath.ac.uk:pub/preprints), 1998.

[3] E. N. Dancer, *Global structure of the solution set of non-linear real-analytic eigenvalue problems*, Proc. Lond. Math. Soc. **XXVI** (1973), 359–384.

[4] H. Kielhöfer, *A bifurcation theorem for potential operators*, J. Functional Analysis **77** (1988), 1–8.

[5] T. Levi-Civita, *Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie*, Math. Annalen **93** (1925), 264–314.

[6] P. I. Plotnikov, *Nonuniqueness of solutions of the problem of solitary waves and bifurcation of critical points of smooth functionals*, Math. USSR Izvestiya **38 (2)** (1992), 333–357.

[7] P. G. Saffman, *Long wavelength bifurcation of gravity waves on deep water*, J. Fluid Mech. **101** (1980), 169–174.

[8] G. G. Stokes, *Considerations relative to the greatest height of oscillatory irrotational waves which can be propagated without change of form*, Mathematical and Physical Papers, vol. I, Cambridge, 1880, pp. 225–228.

[9] J. F. Toland, *Stokes waves*, Topological Methods in Nonlinear Analysis **7** & **8** (1996 & 1997), 1–48 & 412–414.