Das Titsgebäude von Siegelschen Modulgruppen vom Geschlecht 2

M. Friedland und G.K. Sankaran

30 November 1999

Abstract

We describe the Tits buildings of the Siegel modular groups $\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$ and $\tilde{\Gamma}_{1,t}$ for t squarefree. These give the configuration of boundary components in the moduli spaces of abelian surfaces with polarization of type $(1,t)$ and polarization of type $(1,t)$ with canonical level structure. We also do the same calculation for the Siegel modular groups $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$ for p,q prime, p odd, corresponding to moduli of abelian surfaces with polarization of type $(1,p)$ and full level-q structure. Colour pictures are available at:

`http://www.bath.ac.uk/~masgks/Buildings`

Wir werden die Titsgebäude gewisser Siegelscher Modulgruppen, die Modulräumen polarisierter abelscher Varietäten mit Levelstruktur entsprechen, berechnen. Diese Gebäude geben bekanntlich die Struktur des Randes des Modulraums wieder. Die Berechnungen sind völlig elementar aber etwas lästig. Wir wollen erreichen, daß künftige Untersuchungen durch diesen Artikel verkürzt werden können. Darüberhinaus sind wohl die Aussagen eleganter als die Beweise.

Im ersten Teil beschreiben wir kurz die Modulräume und den Zusammenhang mit Titsgebäuden Symplektischer Gruppen. Dem zweiten bzw. dritten Teil sind den Berechnungen des Titsgebäudes für $\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$ und $\tilde{\Gamma}_{1,t}$ (t quadratfrei) bzw. $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$, p,q prim, $p>2$, gewidmet. Für die Gruppen verwenden wir die Notation aus [HKW]. Dabei gehört $\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$, bzw. $\tilde{\Gamma}_{1,t}$ zu den Modulräumen abelscher Flächen mit Polarisierung vom Typ $(1,t)$ ohne Levelstruktur bzw. mit kanonischer Levelstruktur und $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$ zu den Modulräumen mit Polarisierung vom Typ $(1,p)$ mit ganzer Levelstruktur der Stufe q.

Weitere, farbige Bilder befinden sich auf der Seite:

`http://www.bath.ac.uk/~masgks/Buildings`

Dieser Artikel beruht im wesentlichen auf der Hannoverschen Diplomarbeit des ersten Autors, die unter Begleitung von Prof. K. Hulek zustande gekommen ist. Die Verfasser danken dem DAAD und dem British Council für finanzielle Unterstützung im Rahmen des ARC-Projekts 313-ARC-XIII-99/45.

1 Modulräume polarisierter abelscher Flächen

Modulräume polarisierter abelscher Varietäten erhält man als Quotienten der Siegelschen oberen Halbebene $\mathbb{H}_g$ nach arithmetischen Untergruppen Γ der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q})$. Der resultierende Quotientenraum $\Gamma\backslash\mathbb{H}_g$ ist eine quasiprojektive Varietät mit schlimmstenfalls Quotientensingularitäten. Die Frage nach der Kompaktifizierung dieses Raumes stellt sich in natürlicher Weise. Eine Möglichkeit, dieses Problem anzugehen, besteht in Mumford's Konzept der toroidalen Kompaktifizierung, wie sie in [HKW] für den Fall der $(1, p)$-polarisierten Flächen (p prim) beschrieben wurde. Dabei wird $\mathbb{H}_2$ vermöge der *Cayley–Abbildung* isomorph auf das dreidimensionale beschränkte Gebiet $\mathcal{D}_2 := \left\{ Z \in \mathrm{Sym}(2, \mathbb{C}) : \mathbf{1} - Z\bar{Z} > 0 \right\}$ abgebildet. Für den topologischen Abschluß definiert man dann sogenannte *rationale Randkomponenten*. Es stellt sich heraus, daß diese in 1:1 Beziehung zu isotropen Unterräumen von $\mathbb{Q}^4$ stehen. Aber mehr noch: Eine Randkomponente F' ist genau dann echt im Abschluß einer Randkomponente enthalten, wenn der zu F' zugehörige Unterraum $U_{F'}$ den Unterraum U_F zu F echt enthält. Die Operation von $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}_2$ induziert eine Operation auf $\mathcal{D}_2$, die in natürlicher Weise auf den topologischen Abschluß $\bar{\mathcal{D}}_2$ fortgesetzt werden kann.
Interessieren wir uns für eine arithmetische Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$, müssen wir den Quotienten $\mathcal{D}_2$ nach Γ betrachten. Die rationalen Randkomponenten von $\mathcal{D}_2$ modulo Γ stehen dann in 1:1 Beziehung zu den Bahnen isotroper Unterräume von $\mathbb{Q}^4$ modulo Γ, wobei Γ auf $\mathbb{Q}^4$ durch Multiplikation von rechts operiert.
Die Beschreibung der Bahnen isotroper Unterräume modulo Γ und deren Nachbarschaftsrelationen werden in einem Graphen, dem Titsgebäude der jeweiligen arithmetischen Untergruppe von $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$, kodiert. Dabei entspricht eine Ecke $e(\Gamma \cdot U)$ dieses Graphen einer Bahn eines nichttrivialen isotropen Unterraums $U \subset \mathbb{Q}^4$ bezüglich der Operation von Γ und je zwei Ecken $e(\Gamma \cdot U_1)$ und $e(\Gamma \cdot U_2)$ werden genau dann mit einer Kante verbunden, wenn es ein $\gamma \in \Gamma$ gibt, so daß $\gamma U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset \gamma U_1$ gilt. Das Titsgebäude gibt also die Konfiguration der Randkomponenten des jeweils betrachteten Modulraums wieder.
Es seien ϵ_1 und ϵ_2 Basisvektoren des $\mathbb{C}^2$ und $\omega_1, \ldots, \omega_4$ eine Basis eines Gitters $L \subset \mathbb{C}^2$ von maximalem Rang und $\omega_i = \omega_{1i}\epsilon_1 + \omega_{2i}\epsilon_2,\ i = 1, \ldots, 4$. Dann ist $\mathbb{C}^2/L$ ein komplexer Torus, der keineswegs projektiv-algebraisch

sein muß. Ein komplexer Torus $X = \mathbb{C}^2/L$, der gerade diese Eigenschaft hat, heißt *abelsche Fläche*. Dies ist genau dann der Fall, falls es eine nicht entartete alternierende Bilinearform α gibt, die bezüglich der gewählten Basis durch eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{Z})$ dargestellt wird, so daß bezüglich der Periodenmatrix von X

$$\Pi := \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24} \end{pmatrix}$$

die *Riemannschen Relationen*

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & \Pi A^{-1\,t}\Pi & = & 0 \text{ und} \\ \text{(ii)} & i\Pi A^{-1\,t}\bar{\Pi} & > & 0 \end{array}$$

gelten.
Für eine geeignete Wahl der Basis von L kann man erreichen, daß α durch die Matrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } E := \mathrm{diag}(e_1, e_2)$$

dargestellt wird. Dabei sind e_1, e_2 eindeutig bestimmte positive ganze Zahlen mit $e_1 | e_2$. Das Paar (e_1, e_2) heißt *Typ* der Polarisierung. Da die Modulräume abelscher Flächen mit (e_1, e_2)– und (ke_1, ke_2)–Polarisierung kanonisch isomorph sind, darf man ohne Einschränkung $e_1 = 1$ annehmen. Um die kombinatorische Aufgabe im angemessenen Rahmen zu halten, werden wir im weiteren Verlauf nur Polarisierungen vom Typ $(1, t), t > 0$ und t quadratfrei betrachten.

Definition. Die Gruppe von linearen Automorphismen auf L, die die Form Λ invariant läßt, also

$$\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z}) := \left\{ \gamma \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Z}) \mid \gamma \Lambda^t \gamma = \Lambda \right\}$$

heißt *symplektische Gruppe bezüglich* Λ.

Die Operation von $\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z})$ auf dem Gitter L induziert eine Operation auf $\mathbb{H}_2$, die für eine Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z})$ (A, B, C, D sind 2×2 Blöcke) durch

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \tau \longmapsto (A\tau + BE)(C\tau + DE)^{-1}E$$

gegeben ist. Durch Austeilen dieser Operation wird der Quotient

$$\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_2$$

zu einem Modulraum (e_1, e_2)-polarisierter abelscher Flächen.

Mit $L^\vee$ bezeichnen wir das *duale Gitter* zu L bezüglich α, das heißt

$$L^\vee = \{y \in L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid \alpha(x,y) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } x \in L\}$$

Der Quotient $L^\vee/L$ ist eine endliche Gruppe, die isomorph zu $(\mathbb{Z}_{e_1} \times \mathbb{Z}_{e_2})^2$ ist. Diese trägt eine alternierende Form α', die in den kanonischen Erzeugenden durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & E^{-1} \\ -E^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmt ist. Eine *Levelstruktur vom kanonischen Typ* ist ein Isomorphismus

$$\lambda : L^\vee/L \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}_{e_1} \times \mathbb{Z}_{e_2})^2$$

der die durch α auf $L^\vee/L$ induzierte alternierende Form in die Form α' überführt.
Wird nun zusätzlich die Erhaltung der Levelstruktur gefordert, so gibt es wie zuvor eine Korrespondenz zwischen den Punkten von $\mathbb{H}_2$ und abelschen Flächen mit Levelstruktur, jedoch verkleinert sich die Gruppe der Automorphismen zu einer Untergruppe von $\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z})$.
Setzen wir $\mathbb{L} = \mathbb{Z}^4$, dann ist $\mathbb{L}^\vee = \frac{1}{e_1}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{e_2}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{e_1}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{e_2}\mathbb{Z}$ bezüglich Λ. Die Automorphismen in $\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z})$, die die Identität auf $\mathbb{L}^\vee/\mathbb{L}$ induzieren (und damit die Levelstruktur erhalten), sind gerade die Elemente g aus $\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z})$, für die $vg \equiv v \mod \mathbb{L}$ für alle $v \in \mathbb{L}^\vee$ gilt.
Zusätzlich betrachten wir das Gitter $\mathbb{L}_n^\vee = \frac{1}{n}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{n}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{n}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{n}\mathbb{Z}$, das duale Gitter von $\mathbb{L}$ bezüglich $nJ := n \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ -\mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$.

Definition. Wir definieren folgende Matrixgruppen:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^\circ_{1,t} &= \mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z}) \\ \tilde{\Gamma}_{1,t} &= \left\{ g \in \tilde{\Gamma}^\circ_{1,t} \mid vg \equiv v \mod \mathbb{L} \text{ für alle } v \in \mathbb{L}^\vee \right\} \\ \tilde{\Gamma}_{1,t}(n) &= \left\{ g \in \tilde{\Gamma}^\circ_{1,t} \mid vg \equiv v \mod \mathbb{L} \text{ für alle } v \in \mathbb{L}^\vee_n \right\} \end{aligned}$$

Bemerkung. Häufig wird statt $\tilde{\Gamma}_{1,t} < \mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z})$ mit der zu ihr konjugierten Gruppe $\Gamma_t = R_t^{-1}\tilde{\Gamma}_{1,t}R_t < \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$, $R_t = \mathrm{diag}(1,1,1,t)$ gearbeitet. Diese hat den Vorteil, daß sie durch gebrochen-lineare Transformationen auf $\mathbb{H}_2$ operiert. Bei der Berechnung des Titsgebäudes ist dieser Unterschied aber ohne Bedeutung. Allerdings werden unter Verwendung der Gruppe Γ_t statt Λ-isotroper Unterräume J-isotrope Unterräume klassifiziert. Wir werden im weiteren Verlauf isotrop als Λ-isotrop verstehen.

Zuerst werden wir noch einige zahlentheoretische Überlegungen anstellen. Für eine positive ganze Zahl n setzen wir

$$\nu(1) := 1, \nu(2) := 3 \text{ und } \nu(n) := \frac{1}{2}n^2 \prod_{q|n, q \text{ prim}} (1 - q^{-2}) \text{ für } n \geq 3$$

und definieren die Menge der Nichttorsionselemente

$$\mathcal{N}(n) := \{v \in \mathbb{Z}_n^2 \mid \lambda v \neq 0 \text{ wenn } 0 \neq \lambda \in \mathbb{Z}_n\}$$

sowie

$$\mathcal{M}(n) := \mathcal{N}(n)/\pm 1$$

Lemma 1.1 *Es sei $n \geq 2$. Die Anzahl der Restklassen in $\mathcal{N}(n)$ beträgt*

$$n^2 \prod_{q|n, q \text{ prim}} (1 - q^{-2})$$

Beweis: [Zi, Hilfssatz 1.2.3]
Es sei $\mathbb{Z}_n^\times$ die Gruppe der Einheiten aus $\mathbb{Z}_n$. Dann operiert $\mathbb{Z}_n^\times$ frei auf $\mathcal{N}(n)$ durch $\lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w)$. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{O}(n) := \mathcal{N}(n)/\mathbb{Z}_n^\times$$

und setzen

$$\tilde{\nu}(1) = 1, \tilde{\nu}(2) = 3 \text{ und } \tilde{\nu}(n) = \frac{1}{\phi(n)}n^2 \prod_{q|n, q \text{ prim}} (1 - q^{-2}) \text{ für } n \geq 3.$$

wobei ϕ die Eulersche ϕ-Funktion ist. Aus Lemma 1.1 folgt unmittelbar, daß $\tilde{\nu}(n)$ die Anzahl der Restklassen in $\mathcal{O}(n)$ $(n \geq 2)$ bestimmt. Mit $\tilde{\phi}(n)$ werden wir die Anzahl der Elemente in $\mathbb{Z}_n^\times/\pm 1$ bezeichnen, also

$$\tilde{\phi}(1) = \tilde{\phi}(2) = 1 \text{ und } \tilde{\phi}(n) = \frac{1}{2}\phi(t) \text{ für } n \geq 3$$

Lemma 1.2 *Es seien $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ und $x_2 \neq 0$. Dann gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, so daß $ggT(x_1 + \lambda x_3 + \mu x_4, x_2) = 1$ ist.*

Beweis: [HKW, Lemma 3.35]

2 Die Gebäude $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,t}^\circ)$ und $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,t})$, t quadratfrei

Definition. Es sei $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ein primitiver Vektor aus $\mathbb{Z}^4$. Dann heißt

$$d_t(v) := \mathrm{ggT}(v_1, v_3, t)$$

der *t-Divisor* von v.

Zur Berechnung der Titsgebäude werden uns folgende Matrizen aus $\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$ (für $k \in \mathbb{Z}$) nützlich sein:

$$M_1(k) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -tk & 1 \end{pmatrix} \quad M_2(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & tk & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -tk & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$

$$j_1\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad j_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

Es gilt: $M_i(n) \in \tilde{\Gamma}_{1,t}(n) \subseteq \tilde{\Gamma}_{1,t}$, $j_i\big(\Gamma_1(n)\big) \subset \tilde{\Gamma}_{1,t}(n)$ und $j_i\big(\Gamma_1(t)\big) \subset \tilde{\Gamma}_{1,t}$ wobei $\Gamma_1(k) := \{\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \mathbf{1}_2 \mod k\}$.
Einen Vektor der Form $(0,a,0,b)$ werden wir im folgenden mit $v_{(a,b)}$ und den Vektor $(1,0,0,0)$ mit v_0 notieren.

Satz 2.1 *Zwei primitive Vektoren aus $\mathbb{Z}^4$, $v = (v_1,v_2,v_3,v_4)$ und $w = (w_1,w_2,w_3,w_4)$ sind genau dann $\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$-äquivalent, falls sie den gleichen t-Divisor $r = d_t(v) = d_t(w)$ haben. Sie sind genau dann $\tilde{\Gamma}_{1,t}$-äquivalent, falls auch $(v_2,v_4) \equiv (w_2,w_4) \mod r$ gilt.*

Beweis: Der Beweis wird in 3 Schritten geführt. Zunächst werden wir einen beliebigen primitiven Vektor $v = (v_1,v_2,v_3,v_4) \in \mathbb{Z}^4$ mit $d_t(v) = r$ vermöge $\tilde{\Gamma}_{1,t}$ in einen Vektor der Form $(r,a_2,0,a_4)$ mit $\mathrm{ggT}(a_2,a_4) = 1$ transformieren, den wir mit $\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$ in den Vektor $(r,1,0,0)$ überführen werden. Im 2.Schritt wird die Invarianz des t-Divisors eines primitiven Vektors unter $\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$ gezeigt und letztlich wird bewiesen, daß zwei Vektoren $(r,v_2,0,v_4)$ und $(r,w_2,0,w_4)$ genau dann $\tilde{\Gamma}_{1,t}$-äquivalent sind, falls $(v_2,v_4) \equiv (w_2,w_4)$ mod r ist.
1.Schritt: Es sei also $(v_1,v_3) \equiv (0,0) \mod r$. Ohne Einschränkung sei $v_1 \neq 0$. Setze $x_1 = \frac{1}{r}v_3$, $x_2 = \frac{1}{r}v_1 \neq 0$, $x_3 = \frac{t}{r}v_2$ und $x_4 = -\frac{t}{r}v_4$. Da r der t-Divisor von v ist, gilt $\mathrm{ggT}(x_1,x_2,\frac{t}{r}) = 1$ und somit ist $\mathrm{ggT}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \mathrm{ggT}(x_1,x_2,\frac{t}{r}v_2,\frac{t}{r}v_4) = \mathrm{ggT}(x_1,x_2,v_2,v_4) = 1$, da v primitiv ist. Wenden wir Lemma 1.2 auf (x_1,x_2,x_3,x_4) an, so liefert dieses $\lambda,\mu \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(x_2,x_1+\lambda x_3+\mu x_4) = 1$. Unter $M_1(\mu)M_2(\lambda)$ werden die Einträge (v_1,v_3)

nach $(v_1, v_3 + \lambda t v_2 - \mu t v_4 - \lambda\mu t v_1)$ transformiert und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(v_1, v_3 + \lambda t v_2 - \mu t v_4 - \lambda\mu t v_1) &= \mathrm{ggT}(v_1, v_3 + \lambda t v_2 - \mu t v_4) \\ &= \mathrm{ggT}(r x_2, r x_1 + \lambda r x_3 + \mu r x_4) \\ &= r\,\mathrm{ggT}(x_2, x_1 + \lambda x_3 + \mu x_4) \\ &= r \end{aligned}$$

Wir können also $\mathrm{ggT}(v_1, v_3) = r$ annehmen. Ein geeignetes Element aus $j_1(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ bringt diesen nach $(r, v_2, 0, v_4)$. Ist nun $v_2 = 0$, so transformiert $M_1(1)$ den Vektor v nach $(r, r, -tv_4, v_4)$, der wiederum durch $j_1(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ auf $(r, r, 0, v_4)$ geht. Wir können also auch $v_2 \neq 0$ annehmen. Nun ist $\mathrm{ggT}(r, v_2, v_4) = 1$, da die Eigenschaft primitiv eines Vektors aus $\mathbb{Z}^4$ unter $\tilde{\Gamma}^\circ_{1,t}$ erhalten bleibt. Wenden wir nun Lemma 1.2 auf $(v_4, v_2, r, 0)$ an, so liefert uns diese ein $\mu \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(v_2, v_4 + \mu r) = 1$. Anwendung der Matrix $M_2(\mu)$ transformiert v nach $(r, v_2, \mu t v_2, v_4 + \mu r)$, der via $j_1(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ auf $(r, v_2, 0, v_4 + \mu r)$ geht. Ein beliebiger primitiver Vektor v mit $d_t(v) = r$ kann also nur unter Verwendung von Matrizen aus $\tilde{\Gamma}_{1,t}$ auf einen Vektor der Form $(r, a_2, 0, a_4)$ gebracht werden. Da $\mathrm{ggT}(v_2, v_4 + \mu r) = 1$ ist, finden wir letztlich ein Element aus $j_2(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$, das $(r, v_2, 0, v_4 + \mu r)$ auf $(r, 1, 0, 0)$ transformiert.

2.Schritt: Nach dem 1.Schritt reicht es aus zu zeigen, daß ein Vektor der Form $v = (r, 1, 0, 0) \in \mathbb{Z}^4, r|t$ die Eigenschaft $d_t(v) = r$ unter der Operation von $\tilde{\Gamma}^\circ_{1,t}$ behält. Als Verallgemeinerung der Überlegungen in [HW, Lemma 0.5] ergeben sich für eine Matrix $(m_{ij}) \in \tilde{\Gamma}^\circ_{1,t}$ notwendigerweise die Kongruenzen

$$\begin{gathered} m_{21} \equiv m_{41} \equiv m_{23} \equiv m_{43} \equiv 0 \mod t \\ m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31} \equiv 1 \mod t \end{gathered}$$

Wenden wir also eine Matrix $M = (m_{ij}) \in \tilde{\Gamma}^\circ_{1,t}$ auf v an, so erhalten wir

$$v \cdot M = (r m_{11} + m_{21}, *, r m_{13} + m_{23}, *)$$

Der t-Divisor von $v \cdot M$ ist

$$\begin{aligned} d_t(v \cdot M) &= \mathrm{ggT}(r m_{11} + m_{21}, r m_{13} + m_{23}, t) \\ &= \mathrm{ggT}(r m_{11}, r m_{13}, t) \\ &= r\,\mathrm{ggT}(m_{11}, m_{13}, \frac{t}{r}). \end{aligned}$$

Wäre $\mathrm{ggT}(m_{11}, m_{13}, \frac{t}{r}) \neq 1$, dann auch $\mathrm{ggT}(m_{11}, m_{13}, t) \neq 1$ im Widerspruch zu $m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31} \equiv 1 \mod t$.

3.Schritt: Es ist klar, daß zwei $\tilde{\Gamma}_{1,t}$-äquivalente primitive Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ die Kongruenz $(v_2, v_4) \equiv (w_2, w_4)$

mod r erfüllen müssen. Hier geht im wesentlichen ein, daß für eine Matrix $M = (m_{ij}) \in \tilde{\Gamma}_{1,t}$ notwendigerweise die Kongruenz

$$m_{22} - 1 \equiv m_{44} - 1 \equiv m_{24} \equiv m_{42} \equiv 0 \mod t \quad (\dagger)$$

gelten muß, die natürlich auch modulo r gelten. Ist nun $v \cdot M = w$ für ein $M = (m_{ij}) \in \tilde{\Gamma}_{1,t}$, dann ist

$$\begin{aligned} w_2 &= m_{12}v_1 + m_{22}v_2 + m_{32}v_3 + m_{42}v_4 \\ w_4 &= m_{12}v_1 + m_{22}v_2 + m_{32}v_3 + m_{42}v_4 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} w_2 &\equiv m_{12}v_1 + v_2 + m_{32}v_3 \mod r \\ w_4 &\equiv m_{14}v_1 + m_{34}v_3 + v_4 \mod r \end{aligned}$$

wegen $(\dagger)$ und damit $(v_2, v_4) \equiv (w_2, w_4) \mod r$, weil $v_1 \equiv v_3 \equiv 0 \mod r$. Die folgenden Überlegungen zeigen, daß diese Kongruenzbeziehungen auch hinreichend sind. Nach dem 1.Schritt können wir ohne Einschränkung annehmen, daß die Vektoren v und w durch $(r, v_2, 0, v_4)$ bzw. $(r, w_2, 0, w_4)$ gegeben sind. Es ist $(v_2, v_4) \equiv (w_2, w_4) \mod r$, also $v_2 = kr + w_2$ und $v_4 = lr + w_4$ für geeignete $k, l \in \mathbb{Z}$. Der Vektor w geht unter Anwendung der Matrix $M_1(k)M_2(l)$ auf $(r, w_2 + kr, ltw_2 - ktw_4 - kltr, w_4 + lr)$, der durch ein geeignetes Element aus $j_1(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) \subset \tilde{\Gamma}_{1,t}$ auf v geht, da $\mathrm{ggT}(r, ltw_2 - ktw_4 - kltr) = r$ ist. $\square$

Korollar 2.2 *Die Gruppe $\tilde{\Gamma}_{1,t}$ operiert transitiv auf der Menge der primitiven Vektoren mit t-Divisor 1.*

Damit können wir nun die Geraden in $\mathbb{Q}^4$ klassifizieren. Bezeichnen wir mit $\mu(t)$ die Anzahl der Teiler von t, so gilt

Satz 2.3 *Die eindimensionalen (und somit isotropen) Unterräume in $\mathbb{Q}^4$ zerfallen unter der Operation von $\tilde{\Gamma}^\circ_{1,t}$ in genau $\mu(t)$ Bahnen.*
Es seien $r_i, i = 1, \ldots, \mu(t)$ die Teiler von t. Dann ist die Anzahl der $\tilde{\Gamma}_{1,t}$-Bahnen eindimensionaler Unterräume durch

$$\psi(t) := \sum_{i=1}^{\mu(t)} \nu(r_i)$$

bestimmt.

Beweis: Zuerst wird jede Gerade in $\mathbb{Q}^4$ mit dem bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmten primitiven Vektor aus $\mathbb{Z}^4$, der die Gerade erzeugt, identifiziert. Nach Satz 2.1 sind zwei primitive Vektoren genau dann $\tilde{\Gamma}^\circ_{1,t}$-äquivalent, wenn sie den gleichen t-Divisor haben. Für t ergeben sich hieraus $\mu(t)$ Möglichkeiten.

Unter der Operation von $\tilde{\Gamma}_{1,t}$ bleibt zusätzlich die Auswahl von (a_2, a_4) mod r und modulo Vorzeichen, das heißt die Auswahl eines Element aus $\mathcal{M}(r)$, deren Mächtigkeit wir in Lemma 1.1 mit $\nu(r)$ bestimmt haben. □
Kommen wir nun zu der Klassifizierung der isotropen Ebenen. Erst hier wird die Forderung quadratfrei an t zum Tragen kommen. Jede isotrope Ebene h aus $\mathbb{Q}^4$ können wir als Erzeugnis zweier primitiver Vektoren v und w schreiben. Ohne Einschränkung werden wir zusätzlich an die erzeugenden Vektoren die Forderung stellen, daß sie das Gitter $h_{\mathbb{Z}} := h \cap \mathbb{Z}^4$ erzeugen.

Lemma 2.4 *Es sei t quadratfrei und $h = v \wedge w$ eine Ebene mit $d_t(v) = r, d_t(w) = s$ und $h_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w$. Dann sind r und s teilerfremd.*

Beweis: Nach den obigen Überlegungen können wir ohne Einschränkung $v = (r, 1, 0, 0)$ voraussetzen. Angenommen, r und s sind nicht teilerfremd. Es sei $m := \mathrm{ggT}(r, s)$. Wir schreiben $mr' = r$ und $ms' = s$ mit $ggT(r', s') = 1$. Aus der Isotropieeigenschaft von h ergibt sich $w_3 = -\frac{t}{r}w_4$. Für den t-Divisor von w gilt $d_t(w) = \mathrm{ggT}(w_1, w_3, t) = s$ und insbesondere, da m die Zahl s teilt

$$-\frac{t}{r}w_4 = w_3 \equiv w_1 \equiv 0 \mod m$$

Nun sind aber $\frac{t}{r}$ und m teilerfremd: Hätten $\frac{t}{r}$ und m einen gemeinsamen Teiler $l > 1$, so können wir $\frac{t}{r} = t'l$ und $m = m'l$ mit $\mathrm{ggT}(t', m') = 1$ schreiben. Dann wäre aber $t = t'lr = t'lmr' = tl^2m'r'$ im Widerspruch zu t quadratfrei. Die Zahl m teilt also r, w_1, w_3 und w_4. Da die Vektoren v und w das Gitter $h_{\mathbb{Z}}$ erzeugen, wird dieses auch von $w' = w - w_2v = (w_1 - rw_2, 0, w_3, w_4)$ und v erzeugt. Insbesondere muß w' auch primitiv sein, aber m ist gemeinsamer Teiler von $w_1 - rw_2, w_3$ und w_4. □

Lemma 2.5 *Es sei t quadratfrei und $h = v \wedge w$ eine isotrope Ebene mit $d_t(v) = r, d_t(w) = s$ und $h_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w$. Dann gibt es primitive Vektoren $\hat{v}, \hat{w}$, so daß $h_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}\hat{v} \oplus \mathbb{Z}\hat{w}$ und $d_t(\hat{v}) = 1$.*

Beweis: Es sei $h = v \wedge w$ mit obigen Voraussetzungen gegeben. Dann ist nach Lemma 2.4 $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$. Für den Fall, daß einer der Vektoren den t-Divisor t hat, ist also nichts zu zeigen.
Es sei $m = \min\{d_t(u) : u \in h_{\mathbb{Z}}\}$ und $\tilde{v}$ ein primitiver Vektor mit $d_t(\tilde{v}) = m$. Da v und w das Gitter $h_{\mathbb{Z}}$ aufspannen, gibt es ganze Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, so daß $\tilde{v} = \lambda v + \mu w$ gilt. Da $\tilde{v}$ primitiv ist, sind insbesondere λ und μ teilerfremd. Wähle $\nu, \xi \in \mathbb{Z}$ so, daß $\lambda\nu + \mu\xi = 1$ ist und definiere $\tilde{w} := -\xi v + \nu w$. Die Vektoren $\tilde{v}$ und $\tilde{w}$ spannen damit das Gitter $h_{\mathbb{Z}}$ auf.
Angenommen, es gilt $m > 1$. Nach Theorem 2.1 gibt es ein $\gamma \in \tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$, so daß $\gamma(\tilde{v}) = (m, 1, 0, 0) =: v'$ ist. Setze $(w'_1, w'_2, w'_3, w'_4) = w' := \gamma(\tilde{w})$ und $h' = v' \wedge w'$. Das Gitter $h'_{\mathbb{Z}}$ wird von v' und w' aufgespannt und es gilt

$m = \min\{d_t(u') : u' \in h'_{\mathbb{Z}}\}$. Gäbe es nämlich einen primitiven Vektor u' mit $d_t(u') < m$, dann wäre $\gamma^{-1}(u')$ Teil einer Basis von $h_{\mathbb{Z}}$ und $d_t(\gamma^{-1}(u')) < m$. Wir setzen $l = \mathrm{ggT}(m, w'_1)$ und werden folgende Fälle unterscheiden:
i) $l = m$. Ohne Einschränkung sei $w'_1 = 0$ (Ist nämlich $w'_1 \neq 0$, dann gibt es eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$, so daß $w'_1 = km$. Das Gitter $h'_{\mathbb{Z}}$ wird dann auch von v' und $w' - kv'$ erzeugt). Das Gitter $h'_{\mathbb{Z}}$ wird von v' und w', also auch von $\tilde{v} := v' + w' = (m, w'_2 + 1, w'_3, w'_4)$ und w' erzeugt. Insbesondere ist $\tilde{v}$ primitiv. Der t-Divisor von w' ist $d_t(w') = \mathrm{ggT}(0, w'_3, t) =: l'$. Da $\tilde{v}$ und w' das Gitter $h'_{\mathbb{Z}}$ aufspannen, gilt nach Lemma 2.4, daß $\mathrm{ggT}(m, l') = 1$ ist. Dann ist $d_t(\tilde{v}) = \mathrm{ggT}(m, w'_3, t) = \mathrm{ggT}(m, l') = 1$ im Widerspruch zu $m > 1$.
ii) $l < m$. Schreibe $w'_1 = kl$ und $m = m'l$. Da $l = \mathrm{ggT}(m, w'_1)$, gibt es $\lambda', \mu' \in \mathbb{Z}$, so daß $\lambda' m + \mu' w'_1 = l$, das heißt $\lambda' m' + \mu' k = 1$ und somit spannen die Vektoren $\tilde{v} := \lambda' v' + \mu' w' = (l, \lambda' + \mu' w_2, \mu' w'_3, \mu' w'_4)$ und $\tilde{w} := -kv' + m'w'$ das Gitter $h'_{\mathbb{Z}}$ auf. Es gilt jedoch $d_t(\tilde{v}) = \mathrm{ggT}(l, \mu w'_3, t) \leq l < m$ im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von m. $\square$

Korollar 2.6 *Jede isotrope Ebene h kann als Erzeugnis zweier Vektoren v und w mit $h_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w$, $d_t(v) = 1$ und $d_t(w) = t$ geschrieben werden.*

Beweis: Nach Lemma 2.5 können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $d_t(v) = 1$ gilt. Dann gibt es nach Theorem 2.1 ein γ aus $\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$, so daß $\gamma(v) = v_0$ ist. Setze $\tilde{w} := \gamma(w)$ und $\tilde{h} := \gamma(h)$. Das Gitter $\tilde{h}_{\mathbb{Z}}$ wird von v_0 und $\tilde{w}$ erzeugt. Für $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \tilde{w}_4)$ folgt aus der Isotropieeigenschaft, daß $\tilde{w}_3 = 0$ ist. Das Gitter $\tilde{h}_{\mathbb{Z}}$ wird auch von $w' = \tilde{w} - \tilde{w}_1 v_0$ und v_0 erzeugt. Der t-Divisor von w' ist $d_t(w') = \mathrm{ggT}(0, 0, t) = t$. Nun ist $h = \gamma^{-1}v_0 \wedge \gamma^{-1}(w')$ und $h_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}\gamma^{-1}(v_0) \oplus \mathbb{Z}\gamma^{-1}(w')$. Aufgrund der Invarianz des t-Divisors unter $\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$ folgt die Behauptung. $\square$

Satz 2.7 *Die Gruppe $\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$ operiert transitiv auf der Menge der isotropen Ebenen. Die Menge der $\tilde{\Gamma}_{1,t}$-Bahnen isotroper Ebenen wird von $\mathcal{O}(t)$ indiziert.*

Beweis: Es sei $h = v \wedge w$ mit $h_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w$ und $d_t(v) = 1$ eine isotrope Ebene. Nach Lemma 2.1 gibt es ein $\gamma \in \tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$, so daß $\gamma(v) = v_0$ ist. Wir setzen $\tilde{w} := \gamma(w)$ und $\tilde{h} = v_0 \wedge \tilde{w}$. Ist $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \tilde{w}_4)$, so folgt aus der Isotropieeigenschaft $\tilde{w}_3 = 0$. Indem wir $\tilde{w}_1$ durch $\tilde{w} - \tilde{w}_1 v_0$ ersetzen, können wir $\tilde{w}_1 = 0$ voraussetzen. Da v_0 und $\tilde{w}$ das Gitter $\tilde{h}_{\mathbb{Z}}$ erzeugen, ist $\mathrm{ggT}(\tilde{w}_2, \tilde{w}_4) = 1$. Wählen wir nun $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda\tilde{w}_2 + \mu\tilde{w}_4 = 1$, so ist $\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & \tilde{w}_4 \\ \mu & \tilde{w}_2 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ und $j_2(\gamma) \in \tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t}$ überführt die Ebene $\tilde{h}$ nach $v_0 \wedge v_{(1,0)}$, womit die erste Aussage gezeigt ist.
Es sei nun $h = v \wedge w$ wie oben. Da $\tilde{\Gamma}_{1,t}$ auf der Menge der primitiven Vektoren mit t-Divisor 1 transitiv operiert, können wir ohne Einschränkung $h = v_0 \wedge w$ annehmen. Wieder können wir annehmen, daß $w_1 = 0$ und aufgrund der

Isotropieeigenschaft von h ist $w_3 = 0$. Die Einträge w_2 und w_4 müssen notwendigerweise teilerfremd sein, da w sonst nicht primitiv wäre. Jede isotrope Ebene ist also äquivalent zu einer Ebene der Form $h = v_0 \wedge v_{(w_2,w_4)}$ mit $\mathrm{ggT}(w_2, w_4) = 1$. Das Paar (w_2, w_4) kann kein Torsionselement in $\mathbb{Z}_t^2$ sein und es definiert deshalb eine mit $[w_2, w_4]_{\mathcal{O}(t)}$ bezeichnete Klasse in $\mathcal{O}(t)$. Wir werden zeigen, daß die Zuordnung

$$\Phi : \left[h'\right]_{\tilde{\Gamma}_{1,t}} \mapsto [w_2, w_4]_{\mathcal{O}(t)}$$

wohldefiniert und bijektiv ist.
i) Φ is wohldefiniert:
Dazu sei $\tilde{h} := v_0 \wedge v_{(\tilde{w}_2,\tilde{w}_4)}$ eine zu h' äquivalente isotrope Ebene, also $\tilde{\gamma}(h') = \tilde{h}$ für ein $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}_{1,t}$. Betrachte $\gamma' = \tilde{\gamma}\gamma^{-1}$, die die isotrope Ebene h auf $\tilde{h}$ transformiert. Dann wird das Gitter $\tilde{h}_{\mathbb{Z}}$ von $\gamma'(v_0)$ und $\gamma'(w)$ aufgespannt, das heißt

$$\begin{aligned} \gamma(v_0) &= a v_0 + b v_{(\tilde{w}_2,\tilde{w}_4)} \\ \gamma(w) &= c v_0 + d v_{(\tilde{w}_2,\tilde{w}_4)} \end{aligned}$$

für ein $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Der t-Divisor ist unter der Operation von $\tilde{\Gamma}_{1,t}$ invariant, es gilt damit

$$d_t(\gamma'(w)) = d_t(w) = \mathrm{ggT}(0, 0, t) = t$$

und somit muß $c \equiv 0 \mod t$ gelten. Da c und d teilerfremd sind, gilt $\mathrm{ggT}(d, t) = 1$. Die Zahl d repräsentiert also eine Einheit in $\mathbb{Z}_t$. Schreiben wir $\tilde{\gamma}(w) = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3, \hat{w}_4)$, so ist also $(\hat{w}_2, \hat{w}_4) \equiv (d\tilde{w}_2, d\tilde{w}_4) \mod t$. Nun ist die Restklasse $(w_2, w_4) \mod t$ unter $\tilde{\Gamma}_{1,t}$ invariant, es gilt also

$$(w_2, w_4) \equiv (\hat{w}_2, \hat{w}_4) \equiv (d\tilde{w}_2, d\tilde{w}_4) \mod t$$

Die Restklassen $(w_2, w_4) \mod t$ und $(\tilde{w}_2, \tilde{w}_4) \mod t$ stimmen bis auf ein Vielfaches eines Repräsentanten einer Einheit in $\mathbb{Z}_t$ überein und somit ist $[w_2, w_4]_{\mathcal{O}(t)} = [\tilde{w}_2, \tilde{w}_4]_{\mathcal{O}(t)}$.
ii) Φ ist surjektiv:
Für eine Restklasse $[w_2, w_4]_{\mathcal{O}(t)}$ wählen wir einen Repräsentanten (w_2', w_4') mit $\mathrm{ggT}(w_2', w_4') = 1$. Dann ist die Bahn von isotropen Ebenen, die durch $h = v_0 \wedge v_{(w_2',w_4')}$ repräsentiert wird, im Urbild von $[w_2, w_4]_{\mathcal{O}(t)}$.
iii) Φ ist injektiv:
Es seien (w_2, w_4) und (w_2', w_4') zwei Repräsentanten aus $[w_2, w_4]_{\mathcal{O}(t)}$. Dann ist $(w_2, w_4) \equiv (ew_2', ew_4') \mod t$ für einen Repräsentanten e einer Einheit in $\mathbb{Z}_t$, also insbesondere $\mathrm{ggT}(e, t) = 1$. Wähle nun $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ so, daß $\begin{pmatrix} \mu & -\lambda \\ t & e \end{pmatrix}$ aus $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ ist. Die Vektoren

$$\begin{aligned} \tilde{v} &:= \mu v_0 - \lambda v_{(w_2,w_4)} \\ \tilde{w} &:= \mu t v_0 - e v_{(w_2,w_4)} \end{aligned}$$

spannen dann das Gitter $h_{\mathbb{Z}}$ auf.
Es gilt $d_t(\tilde{v}) = \mathrm{ggT}(\mu, 0, t) = 1$ und $d_t(\tilde{w}) = \mathrm{ggT}(t, 0, t) = t$. Nach Korollar 2.2 gibt es ein $\gamma \in \tilde{\Gamma}_{1,t}$ mit $\gamma(\tilde{v}) = v_0$. Wir setzen $\hat{w} := \gamma(\tilde{w})$ und schreiben $\hat{w} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3, \hat{w}_4)$. Dann muß wieder $\hat{w}_3 = 0$ sein und ohne Einschränkung können wir $\hat{w}_1 = 0$ annehmen. Da die Kongruenzklasse $(ew_2, ew_4) \mod t$ invariant unter $\tilde{\Gamma}_{1,t}$ ist, gilt

$$(\hat{w}_2, \hat{w}_4) \equiv (ew_2, ew_4) \equiv (w_2', w_4') \mod t$$

Nach [Sh, Lemma 1.42] gibt es ein $g \in \Gamma_1(t)$, so daß $g(\hat{w}_2, \hat{w}_4) = (w_2', w_4')$ ist. Die Matrix $\tilde{\gamma} := j_2(g)$ ist aus $\tilde{\Gamma}_{1,t}$ und

$$\tilde{\gamma}(v_0 \wedge v_{(\hat{w}_2, \hat{w}_4)}) = v_0 \wedge v_{(w_2', w_4')} = h'$$

Das heißt also, $\tilde{\gamma}\gamma^{-1} \in \tilde{\Gamma}_{1,t}$ überführt die isotrope Ebene h nach h'. □
Damit sind die Ecken der Titsgebäude $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,t})$ und $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t})$ vollständig beschrieben. Was bleibt, ist die Untersuchung der Kanten der Titsgebäude. Im Fall $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t})$ können wir uns auf die Ebene $(1,0,0,0) \wedge (0,1,0,0)$ beschränken, die bis auf Äquivalenz die Unterräume enthält, die von primitiven Vektoren $(s_i, 1, 0, 0)$ aufgespannt werden, wobei s_i alle Teiler von t durchläuft. Für $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t})$ ergibt sich also eine $(\mu(t)_1, 1_{\mu(t)})$-Konfiguration:

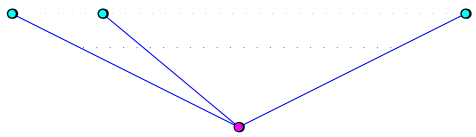

Bild 1: $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}^{\circ}_{1,t})$

Lemma 2.8 *Sind $r_i, i = 1, \ldots, \mu(t)$ die Teiler von t, so enthält jede isotrope Ebene bis auf $\tilde{\Gamma}_{1,t}$-Äquivalenz genau*

$$\sum_{i=1}^{\mu(t)} \tilde{\phi}(r_i)$$

Geraden.

Beweis: Es reicht aus, dazu die isotrope Ebene $h = v_0 \wedge v_{(1,0)}$ zu betrachten. Diese enthält bis auf Äquivalenz die Geraden, die von primitiven Vektoren der Form $(r_i, k, 0, 0)$ aufgespannt werden. Was bleibt, ist die Auswahl von k aus $\mathbb{Z}^{\times}_{r_i}/\pm 1$, dessen Mächtigkeit wir mit $\tilde{\phi}(r_i)$ bestimmt haben. □
Wir bezeichnen mit $\mathfrak{H}\left([w_2, w_4]_{\mathcal{O}(t)}\right)$ die Bahn von isotropen Ebenen, die durch $[w_2, w_4]_{\mathcal{O}(t)}$ bzw. mit $\mathfrak{L}\left([x_2, x_4]_{\mathcal{M}(r)}\right)$ die Bahn von Geraden, die durch den Teiler r und der Restklasse $[x_2, x_4]_{\mathcal{M}(r)}$ bestimmt ist.

Lemma 2.9 *Je zwei Ecken* $\mathfrak{H}\left([w_2,w_4]_{\mathcal{O}(t)}\right)$ *und* $\mathfrak{L}\left([x_2,x_4]_{\mathcal{M}(r)}\right)$ *im Titsgebäude* $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,t})$ *werden genau dann miteinander verbunden, wenn* (w_2,w_4) *und* (x_2,x_4) *die selben Restklassen in* $\mathcal{O}(r)$ *bestimmen.*

Beweis: Da $[w_2,w_4]\in\mathcal{O}(t)$ ist, repräsentiert (w_2,w_4) kein Torsionselement in $\mathbb{Z}_t^2$. Die Zahl r teilt t und damit ist (w_2,w_4) auch kein Repräsentant eines Torsionselements in $\mathbb{Z}_r^2$, das heißt, $[w_2,w_4]_{\mathcal{O}(r)}$ ist wohldefiniert.
($\Rightarrow$)
Seien $\mathfrak{H}\left([w_2,w_4]_{\mathcal{O}(t)}\right)$ und $\mathfrak{L}\left([x_2,x_4]_{\mathcal{M}(r)}\right)$ miteinander verbunden. Dann gibt es für jedes Element h aus $\mathfrak{H}\left([w_2,w_4]_{\mathcal{O}(t)}\right)$ einen Repräsentanten $\ell\in\mathfrak{L}\left([x_2,x_4]_{\mathcal{M}(r)}\right)$ mit $\ell\subset h$. Wir wählen $h=v_0\wedge v_{(w_2,w_4)}$. Mit $v=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ bezeichnen wir den bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmten primitiven Vektor, der den Unterraum ℓ aufspannt. Dann läßt sich v als Linearkombination $v=av_0+bv_{(w_2,w_4)}$ für $a,b\in\mathbb{Z}$ schreiben. Da ℓ Repräsentant der Bahn $\mathfrak{L}\left([x_2,x_4]_{\mathcal{M}(r)}\right)$ ist, gilt $d_t(v)=r$ und $(v_2,v_4)\equiv(x_2,x_4) \mod r$. Also muß a die Kongruenz $a\equiv 0 \mod r$ erfüllen. Dann ist b aber Repräsentant einer Einheit in $\mathbb{Z}_r$, weil v sonst nicht primitiv wäre. Somit stimmen (v_2,v_4) und (w_2,w_4) bis auf eine Einheit in $\mathbb{Z}_r$ überein und damit gilt $[w_2,w_4]_{\mathcal{O}(r)}=[v_2,v_4]_{\mathcal{O}(r)}=[x_2,x_4]_{\mathcal{O}(r)}$.
($\Leftarrow$)
Es gelte $[x_2,x_4]_{\mathcal{O}(r)}=[w_2,w_4]_{\mathcal{O}(r)}$ und $h=v_0\wedge v_{(w_2,w_4)}\in\mathfrak{H}\left([w_2,w_4]_{\mathcal{O}(t)}\right)$. Nun ist $[x_2,x_4]_{\mathcal{M}(r)}=[ew_2,ew_4]_{\mathcal{M}(r)}$ für einen Repräsentanten e einer Einheit in $\mathbb{Z}_r$. Betrachte den Unterraum ℓ, der von $(r,ew_2,0,ew_4)=rv_0+ev_{(w_2,w_4)}\in h$ erzeugt wird. Dann gilt $\ell\subset h$, und nach $[ew_2,ew_4]_{\mathcal{M}(r)}=[x_2,x_4]_{\mathcal{M}(r)}$ auch $\ell\in\mathfrak{L}\left([x_2,x_4]_{\mathcal{M}(r)}\right)$. $\square$
Mit diesen Angaben können wir letzlich das Titsgebäude $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,t})$ angeben:

Satz 2.10 *Das Titsgebäude* $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,t})$ *ist ein Graph mit* $\psi(t)$ *Ecken, die von Geraden* $\ell_0=\mathbb{Q}v_0$ *und* $\ell_{r_i,(v_2,v_4)}=\mathbb{Q}(r_i,v_2,0,v_4)$ *repräsentiert werden, wobei* r_i *alle Teiler von* t *und* (v_2,v_4) *alle Restklassen in* $\mathcal{M}(r_i)$ *durchläuft, sowie* $\tilde{\nu}(t)$ *Ecken, die von Ebenen* $h_{[w_2,w_4]}=v_0\wedge v_{(w_2,w_4)}$ *repräsentiert werden, wobei* (w_2,w_4) *alle Restklassen in* $\mathcal{O}(t)$ *durchläuft. Jede Ecke wird mit der Ecke* ℓ_0 *verbunden und* $\ell_{r_i,(v_2,v_4)}$ *wird genau dann mit der Ecke* $h_{[w_2,w_4]}$ *verbunden, wenn* (v_2,v_4) *und* (w_2,w_4) *Repräsentanten der gleichen Restklasse in* $\mathcal{O}(r_i)$ *sind.*

3 Die Gebäude $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}(q))$, p,q prim, $p\geq 3$.

Wir werden das Titsgebäude der Paramodulgruppe $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$ zur Stufe q und Typ $(1,p)$ berechnen. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß p sowie

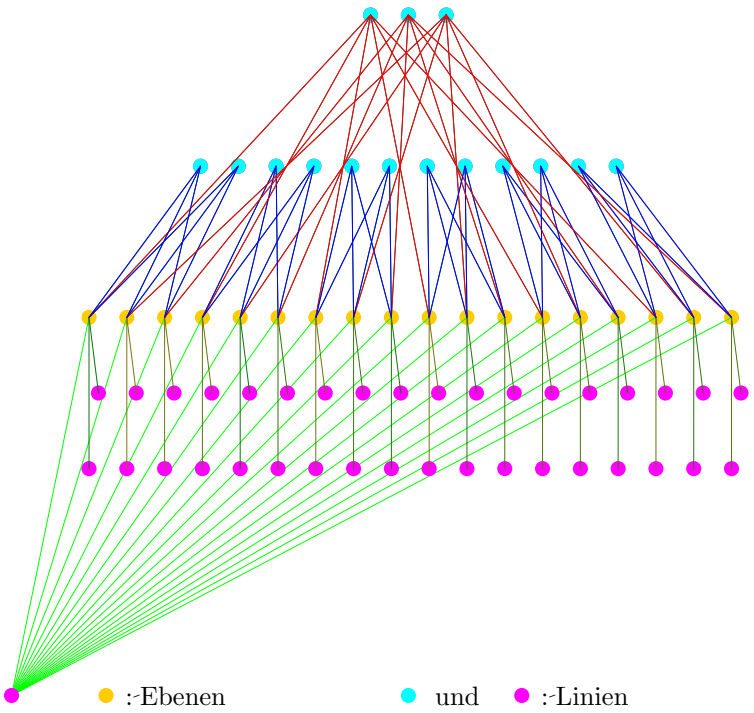

Bild 2: $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,10})$

q Primzahlen sind, und $p \geq 3$ ist. Die entsprechenden Modulräume sind (noch) nicht so gründlich untersucht worden: wir erwähnen aber den Fall $p = 3$, $q = 2$, daß der Nieto-Quintic (siehe [BN]) entspricht.
Die Gruppe $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$ ist der Kern der Reduktionsabbildung $\phi_q : \tilde{\Gamma}^\circ_{1,p} \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{Z}_q)$. Allgemein bezeichnen wir mit $\bar{A}$ die Restklasse mod q irgendeiner Matrix A.

Lemma 3.1 *Wenn $p \neq q$ ist, ist das Bild $\phi_q(\tilde{\Gamma}^\circ_{1,p})$ eine zu $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_q)$ konjugierte Untergruppe von $\mathrm{GL}(4, \mathbb{Z}_q)$.*

Beweis: Für jedes $\bar{\gamma} \in \phi_q(\tilde{\Gamma}^\circ_{1,p})$ ist $\bar{\gamma}\bar{\Lambda}\,{}^t\bar{\gamma} = \bar{\Lambda}$. Da $p \neq q$ ist, ist $\bar{\Lambda}$ eine nicht-entartete schief-symmetrische quadratische Form auf $\mathbb{Z}_q^4$ und damit zu $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ -\mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$ äquivalent. Die Gruppe $\mathrm{Sp}(\bar{\Lambda}, \mathbb{Z}_q)$ ist deshalb durch Konjugation mit $\bar{R}_p$ zu $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_q)$ isomorph und enthält $\phi_q(\tilde{\Gamma}^\circ_{1,p})$.
Nach [F, A.5.2] ist $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_q)$ von J und $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & S \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$, $S = {}^tS$, erzeugt. Also ist $\mathrm{Sp}(\bar{\Lambda}, \mathbb{Z}_q)$ von $\bar{R}_p^{-1} J \bar{R}_p = \begin{pmatrix} 0 & \bar{E} \\ -\bar{E}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ und $\bar{R}_p^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & S \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \bar{R}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \overline{S'} \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$ erzeugt, wobei $S' = \begin{pmatrix} s_1 & ps_2 \\ s_2 & ps_3 \end{pmatrix}$, $s_i \in \mathbb{Z}$. Nehmen wir zuerst λ, μ so, daß $\lambda p + \mu q = s_2$ ist, dann ist $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \hat{S} \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$ mit $\hat{S} = \begin{pmatrix} s_1 & \lambda p^2 \\ \lambda p & s_3 \end{pmatrix}$ Urbild von $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \overline{S'} \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$.
Ist statt dessen $\lambda p + \mu q = -1$ und $\alpha p + \beta q = \mu$, so liegt

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta q & 0 & p \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha q + \lambda & 0 & q \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z})$ und $\phi_q(M) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{E} \\ -\bar{E}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Lemma 3.2 *Ist $q \neq p$, so operiert $\phi_q(\tilde{\Gamma}^\circ_{1,p})$ transitiv auf $\mathbb{Z}_q^4 \setminus \{0\}$. Ist $q = p$, so gibt es genau zwei $\phi_p(\tilde{\Gamma}^\circ_{1,p})$-Bahnen auf $\mathbb{Z}_p^4 \setminus \{0\}$, und zwar $\ker \bar{\Lambda} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{Z}_p^4 \setminus \ker \bar{\Lambda}$.*

Beweis: $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_q)$ operiert transitiv auf $\mathbb{Z}_q^4 \setminus \{0\}$ und nach Lemma 3.1 gilt dieses damit auch für $\phi_q(\tilde{\Gamma}^\circ_{1,p})$, falls $q \neq p$ ist.
Im Falle $q = p$ ergibt sich: die Gruppe $\phi_p(\tilde{\Gamma}^\circ_{1,p})$ erhält die Form $\bar{\Lambda}$ sowie $\ker \bar{\Lambda} = \{(0, \bar{v}_2, 0, \bar{v}_4) \mid \bar{v}_2, \bar{v}_4 \in \mathbb{Z}_p\}$. Die Untergruppe $\phi_p j_2\big(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})\big) < \tilde{\Gamma}^\circ_{1,p}$ operiert wie $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ auf $\ker \bar{\Lambda}$, also transitiv.
Sei dann $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) \in \mathbb{Z}_p^4 \setminus \{0\}$ und $(\bar{v}_1, \bar{v}_3) \neq (0, 0)$. Durch Anwendung eines geeigneten Elements aus $\phi_p j_1\big(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})\big)$ können wir annehmen, daß

$(\bar{v}_1, \bar{v}_3) = (1, 0)$ ist. Aber $(1, \bar{v}_2, 0, \bar{v}_4)$ wird von $\phi_q\,(M_2(1)^{v_4} M_1(1)^{v_2})$, gefolgt von einem Element aus $\phi_p j_1\big(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\big)$ auf v_0 transformiert. □
Ein Vektor $v \in \mathbb{Z}^4$ heißt lang, wenn für alle $w \in \mathbb{Z}^4$ gilt: $p | v\Lambda^t w$, sonst heißt er kurz.

Bemerkung. Die langen Vektoren (bzw. kurzen Vektoren) sind gerade die Vektoren v mit $d_p(v) = p$ (bzw. $d_p(v) = 1$).

Lemma 3.3 *Es seien $v, v' \in \mathbb{Z}^4$ kurz und primitiv. Die Vektoren v und v' sind dann und nur dann $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$-äquivalent, falls $\bar{v} = \overline{v'}$ ist.*

Beweis: Falls $v' = \gamma v$ für ein $\gamma \in \tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$, ist klar, daß dann $\bar{v} = \overline{v'}$ gilt.
Sei dann $\bar{v} = \overline{v'}$. Nach Lemma 3.2 dürfen wir annehmen, daß $\bar{v} = v_0$ ist. Dann ist $\mathrm{ggT}(v_1, v_3)$ prim zu $pq\,\mathrm{ggT}(v_2, v_4)$. Wenden wir Lemma 1.2 auf $(v_3, v_1, pqv_2, -pqv_4)$ an, so liefert dieses ganze Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, so daß $\mathrm{ggT}(v_1, v_3 + \lambda pqv_2 - \mu pqv_4) = 1$ ist. Wenden wir $M_2(q)^\mu M_1(q)^\lambda$ auf v an, so werden die Einträge (v_1, v_3) nach $(v_1, v_3 + \lambda pqv_2 - \mu pqv_4 - \lambda\mu pq^2 v_1)$ transformiert. Es gilt $\mathrm{ggT}(v_1, v_3 + \lambda pqv_2 - \mu pqv_4 - \lambda\mu pq^2 v_1) = 1$.
Wir können also annehmen, daß v_1 und v_3 teilerfremd sind. Da auch $\mathrm{ggT}(q, v_1) = 1$ ist, gibt es ganze Zahlen λ', μ' so daß $\lambda' v_1 + \mu' q v_3 = 1$ ist. Die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda' & -v_3 \\ \mu' q & v_1 \end{pmatrix}$ ist aus $\Gamma_1(q)$ und $j_1\left(\begin{pmatrix} \lambda' & -v_3 \\ \mu' q & v_1 \end{pmatrix}\right)$ transformiert uns den Vektor v nach $(1, v_2, 0, v_4)$. Anwendung von $M_2(q)^{-v_4/q}$ führt diesen nach $(1, v_2, -pv_2v_4, 0)$ über. Wieder durch Anwendung eines geeigneten Elements aus $j_1\big(\Gamma_1(q)\big)$ wird dieser nach $(1, v_2, 0, 0)$ transformiert, der letztlich via $M_1(q)^{-v_2/q}$ nach v_0 übergeht. □

Lemma 3.4 *Es seien $v, v' \in \mathbb{Z}^4$ lang und primitiv. Ist $q \neq p$, so sind die Vektoren v und v' dann und nur dann $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$-äquivalent, falls $\bar{v} = \overline{v'}$ ist. Ist $q = p$, so zerfällt jede Restklasse mod q von langen Vektoren aus $\mathbb{Z}^4$ in genau q^2 unterschiedliche $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$-Bahnen.*

Wie vorher können wir nach Lemma 3.2 annehmen, daß $\bar{v} = (0, 1, 0, 0) \in \mathbb{Z}_q^4$. Da $\mathrm{ggT}(v_4, v_2, qv_1, qv_3) = 1$ ist, können wir $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ finden, so daß $\mathrm{ggT}(v_2, v_4 + \lambda q v_1 + \mu q v_3) = 1$. Durch Anwendung von zuerst $M_2(q)^\lambda$ und danach $M_3(q)^\mu$ wird v auf einen Vektor mit v_2, v_4 teilerfremd transformiert. Durch Anwendung eines Elements von $j_2\big(\Gamma_1(q)\big)$ können wir auf $v = (v_1, 1, v_3, 0)$ reduzieren. Dann ist p sowie q Teiler von $\mathrm{ggT}(v_1, v_3)$, da v lang, bzw. $\bar{v} = (0, 1, 0, 0)$ ist.
Bei $q \neq p$ gilt also $pq | \mathrm{ggT}(v_1, v_3)$ und wir setzen $v_1 = pqv_1'$, $v_3 = pqv_3'$. Wenden wir jetzt $M_2(q)^\nu$ gefolgt von einem Element aus $j_2\big(\Gamma_1(q)\big)$ an, so können wir statt $(v_1, 1, v_3, 0)$ mit $(v_1, 1, v_3 + \nu pq, 0)$ arbeiten. Wenn wir ein geeignetes ν wählen, können wir annehmen, daß $v = (v_1, 1, v_3, 0)$ mit $\mathrm{ggT}(v_1', v_3') = 1$ ist, und $v_3 \neq 0$. Dieser wird aber von $M_2(q)^{-v_3'}$ gefolgt von $M_3(q)^{v_1'}$ in $(0, 1, 0, 0) \in \mathbb{Z}^4$ transformiert.

Bei $q = p$ scheitert diese Argumentation, weil man statt $v_i = pqv_i'$ mit $\mathrm{ggT}(v_1', v_3') = 1$ nur $v_1 = pv_1'$, $v_3 = pv_3'$ und $\mathrm{ggT}(v_1', v_3')|p$ hat. Jeder lange primitive Vektor mit Restklasse $\bar{v} = (0,1,0,0) \in \mathbb{Z}_p^4$ ist zu einem $(\alpha p, 1, \beta p, 0)$, $0 \le \alpha, \beta < p$ äquivalent. Es stellt sich noch die Frage, ob diese Vektoren möglicherweise unter sich $\tilde{\Gamma}_{1,p}(p)$-äquivalent sind. Der Vektor $(0,1,0,0)$ ist aber weder zu $(\alpha p, 1, 0, 0)$ noch zu $(0, 1, \beta p, 0)$ äquivalent $(\alpha, \beta \neq 0)$. Sonst gäbe es Matrizen $M^{\pm}$ aus $\tilde{\Gamma}_{1,p}(p)$, deren zweite Zeile $(\alpha p, 1, 0, 0)$, bzw. $(0, 1, \beta p, 0)$ ist. Dann wäre aufgrund der symplektischen Bedingungen z.B. $M_{11}^+ = M_{13}^+$: aber $\overline{M_{11}^+} = 1$ und $\overline{M_{13}^+} = 0$. Die Bedingungen bei M^- führen ebenfalls zum Widerspruch. Da $(0,1,0,0)$ zu $(\alpha p, 1, \beta p, 0)$ $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$-äquivalent ist und $\tilde{\Gamma}_{1,p}(p) \triangleleft \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ ist, genügt dieses um zu beweisen, daß die Vektoren $(\alpha p, 1, \beta p, 0)$, $0 \le \alpha, \beta < p$ nicht $\tilde{\Gamma}_{1,p}(p)$-äquivalent sind. □

Satz 3.5 *Bei $q \neq p, 2$ (bzw. $q = p$, $q = 2$) zerfallen die eindimensionalen isotropen Unterräume von $\mathbb{Q}^4$ unter der Operation von $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$ in $q^4 - 1$ (bzw. $q^4 - q^2$, 30) Bahnen.*

Beweis: Jede Gerade $\ell \subset \mathbb{Q}^4$ enthält genau zwei primitive Vektoren aus $\mathbb{Z}^4$, die wir mit $\pm v_\ell$ bezeichnen. Zwei Geraden ℓ und ℓ' sind genau dann äquivalent, wenn $\{\pm v_\ell\}$ mit $\{\pm v_{\ell'}\}$ äquivalent ist, also wenn v_ℓ zu $\pm v_{\ell'}$ äquivalent ist. Bei $q \neq p$ heißt das, daß v_ℓ und $v_{\ell'}$ beide kurz oder beide lang sind, und $\overline{v_\ell} = \overline{v_{\ell'}}$ ist. Die Bahnen der Geraden entsprechen also

$$[\overline{v_\ell},\ \text{Länge}] \in (\mathbb{Z}_q^4 \setminus \{0\}) \times \{\text{kurz, lang}\}/\pm 1.$$

Bei $q \neq 2$ heißt das $(q^4 - 1).2/2 = q^4 - 1$ Bahnen. Bei $q = 2$ operiert ± 1 trivial und man hat also $(q^4 - 1).2 = 30$ Bahnen.
Bei $q = p$ und v_ℓ kurz läuft alles wie oben, ausgenommen nur, daß $\overline{v_\ell} \in \mathbb{Z}_q^4 \setminus \ker \bar{\Lambda}$ ist und es daher für $\overline{v_\ell}$ statt $q^4 - 1$ nur $q^4 - q^2$ mögliche Werte gibt. Man hat deshalb $(q^4 - q^2)/2$ Bahnen von Geraden, die von einen kurzen Vektor erzeugt sind. Ist v_ℓ lang, so hängt seine $\tilde{\Gamma}_{1,p}(p)$-Äquivalenzklasse nach Satz 3.4 nicht nur von $\overline{v_\ell} \in \ker \bar{\Lambda} \setminus \{0\}$ sondern auch von der Restklasse mod p^2 der Projektion von v_ℓ in $\phi_p^{-1}(\ker \bar{\Lambda})$ ab. Dafür gibt es genau $p^2 = q^2$ mögliche Werte, man hat also $(q^2 - 1)q^2$ mögliche $\tilde{\Gamma}_{1,p}(p)$-Äquivalenzklassen des Vektors v_ℓ und damit wiederum $(q^4 - q^2)/2$ Bahnen von Geraden, die von einem langen Vektor erzeugt sind, also insgesamt $(q^4 - q^2)$ Bahnen von Geraden. □
Wenden wir uns nun den isotropen Ebenen aus $\mathbb{Q}^4$ zu. Nach Korollar 2.6 kann jede isotrope Ebene h als Erzeugnis $v \wedge w$ eines kurzen Vektors v und eines langen Vektors w mit $h_\mathbb{Z} = \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w$, geschrieben werden. Notwendigerweise ist $\overline{w} \neq \overline{v}$, da $h_\mathbb{Z}$ ebenfalls von $v - w$ und w erzeugt ist und $v - w$ deshalb primitiv ist. Wäre $\overline{w} = \overline{v}$, so wäre $v - w$ durch q teilbar.

Satz 3.6 *Ist $q \neq p, 2$ (bzw. $q = p$, $q = 2$), so enthält jede isotrope Ebene bis auf $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$-Äquivalenz genau $q^2 - 1$ (bzw. $q^2 - q$, 6) verschiedene eindimensionale Unterräume.*

Beweis: Aufgrund der Transitivität von $\tilde{\Gamma}^\circ_{1,p}$ auf der Menge der isotropen Ebenen reicht es aus, diese Aussage für die Ebene $h = v_0 \wedge (0,1,0,0)$ zu zeigen. Diese Ebene enthält kurze Vektoren mit genau den Restklassen $(\alpha, \beta, 0, 0)$, $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \mathbb{Z}_q^2 \setminus \{0\}$ und zwar $(\alpha + \lambda q, \beta, 0, 0)$, $0 < \alpha, \beta \leq q$ und $\mathrm{ggT}(\alpha + \lambda q, \beta) = 1$: bei $q = p$ aber ist $\bar{\alpha} = 0$ nicht gestattet. Das heißt bei $q \neq p, 2$ (bzw. $q = p$, $q = 2$) $q^2 - 1$ (bzw. $q^2 - q$, 3) kurzen Vektoren bis auf $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$-Äquivalenz, also $(q^2-1)/2$ (bzw. $(q^2-q)/2$, 3) von kurzen Vektoren erzeugten Geraden. Bei $q \neq p$ (insbesondere bei $q = 2$) gilt dasselbe für lange Vektoren. Ist $q = p$, so sind die Äquivalenzklassen von langen Vektoren auf h von $(\lambda q^2 + \alpha q, \beta, 0, 0)$ repräsentiert, wobei $0 < \beta < q$, $0 < \alpha \leq q$ und $\mathrm{ggT}(\lambda q^2 + \alpha q, \beta) = 1$ ist. Das heißt $q(q-1)$ langen Vektoren und wiederum $q(q-1)/2$ von langen Vektoren erzeugten Geraden bis auf $\tilde{\Gamma}_{1,p}(p)$-Äquivalenz. □

Lemma 3.7 *Es seien h, h' zwei isotrope Ebenen. Gibt es zu jedem kurzen bzw. langen Vektor v' aus h' einen kurzen bzw. langen Vektor v aus h, so daß v und v' $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$-äquivalent sind, so sind auch h und h' $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$-äquivalent.*

Beweis: Es reicht aus, die Behauptung für $h' = v_0 \wedge (0,1,0,0)$ zu zeigen. Nach Voraussetzung enthält h einen kurzen Vektor v mit $\overline{v} = v_0$ und einen langen Vektor w mit $\overline{w} = (0,1,0,0)$ (und, falls $q = p$, auch $w_1 \equiv w_3 \equiv 0 \mod q^2$). Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß das Gitter $h_\mathbb{Z}$ von v und w erzeugt wird. Es gibt nach Voraussetzung ein $\gamma \in \tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$, so daß $\gamma v = v_0$ ist. Wir setzen $\tilde{w} := \gamma w$. Es folgt aus der Isotropiebedingung $\tilde{w}_3 = 0$. Da $\tilde{h}_\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\gamma v \oplus \mathbb{Z}\gamma w$ auch von v_0 und $\tilde{w} - \tilde{w}_1 v_0$ erzeugt wird, können wir, ohne die Restklasse $\overline{\tilde{w}}$ oder bei $q = p$ die Restklasse von $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_3) \mod q^2$ zu ändern, $\tilde{w}_1 = 0$ voraussetzen. Wie w ist $\tilde{w}$ primitiv, also $\mathrm{ggT}(\tilde{w}_2, \tilde{w}_4) = 1$. Durch Anwendung eines geeigneten Elements aus $j_2\big(\Gamma_1(q)\big)$ wird $\tilde{w}$ auf $(0,1,0,0)$ und v_0 wieder auf v_0, und damit $\tilde{h} = \tilde{h}_\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}$ auf h', geführt. □

Satz 3.8 *Ist $q \neq 2$ (bzw. $q = 2$), so liegt jeder eindimensionale Unterraum $\ell \subset \mathbb{Q}^4$ in genau $(q^2 - 1)/2$ (bzw. 3) nicht $\tilde{\Gamma}_{1,p}(q)$-äquivalenten isotropen Ebenen.*

Beweis: Da $\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z})$ transitiv auf die Mengen der kurzen bzw. langen Vektoren operiert, reicht es, die Aussage für den Fall $\ell = \mathbb{Q}v_0$ bzw. $\ell = \mathbb{Q}(0,1,0,0)$ zu beweisen. Es seien also $\ell = \mathbb{Q}v_0$ und $h = v_0 \wedge w$ eine istrope Ebene, w lang. Wie oben können wir ohne Einschränkung $w = (0, w_2, 0, w_4)$ mit $\mathrm{ggT}(w_2, w_4) = 1$ voraussetzen. Dann können wir vermöge $j_1\big(\Gamma_1(q)\big)$ auch $0 \leq w_2, w_4 < q$ annehmen: nach Satz 3.4 sind diese Vektoren (auch bei $q = p$) nicht äquivalent. Nach Lemma 3.7 sind die entsprechenden Ebenen

auch nicht äquivalent (aber $v_0 \wedge (0, w_2, 0, w_4) = v_0 \wedge (0, q - w_2, 0, q - w_4)$). Daß heißt $(q^2 - 1)/2$ Ebenen, bzw. 3 Ebenen bei $q = 2$.
Die Aussage für den Fall $h = v \wedge (0, 1, 0, 0)$ läßt sich (auch bei $q = p$) analog beweisen.

Satz 3.9 *Es gibt bei $q \neq p, 2$ (bzw. $q = p$, $q = 2$) genau $(q^4 - 1)/2$ (bzw. $(q^2 - 1)(q^2 + q)/2$, 15) Bahnen isotroper Ebenen.*

Beweis: Das Titsgebäude hat nach Satz 3.5 und Satz 3.8 $(q^2 - 1)(q^4 - 1)/2$ (bzw. $(q^2 - 1)(q^4 - q^2)/2$, 90) Kanten. Nach Satz 3.6 entspricht jede Bahn isotroper Ebenen $q^2 - 1$ (bzw. $q^2 - q$, 6) Kanten. □
Damit liegt für das Titsgebäude $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}(q))$ eine (a_b, c_d)-Konfiguration vor, wobei $a = q^4 - 1$ (bzw $q^4 - q^2$, 30); $b = (q^2 - 1)/2$ (bzw. $(q^2 - 1)/2$, 3); $c = (q^4 - 1)/2$ (bzw. $(q^2 - 1)(q^2 + q)/2$, 15); und $d = q^2 - 1$ (bzw. $q^2 - q$, 6).
Setzen wir nun $q = 2$ oder $q = 3$ und $q \neq p$ voraus. Wir haben gesehen, daß je zwei eindimensionale Unterräume genau dann äquivalent sind, wenn die erzeugenden primitiven Vektoren entweder beide kurz oder beide lang sind, sowie die gleiche Restklassen mod q bestimmen. Wir können also die Bahnen jeweils durch $\mathbb{Z}_q^4 \setminus \{0\}/ \pm 1$ indizieren. Ist $q = 2$ oder 3, so können wir diese Menge auch als $\mathbb{P}^3(\mathbb{Z}_q)$ auffassen. Nun können wir jede isotrope Ebenen h als Erzeugnis zweier Vektoren v und w mit $\overline{v} \neq \overline{w}$ darstellen. Mit der obigen Identifikation können damit $\overline{h} = \overline{v} \wedge \overline{w}$ als Gerade in $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^3(\mathbb{Z}_q))$ auffassen. Nach Lemma 3.7 sind zwei isotrope Ebenen h und h' genau dann äquivalent, falls $\overline{h} = \overline{h'}$, das heißt, wenn sie die gleiche Gerade in $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^3(\mathbb{Z}_q))$ bestimmen. Wir können also die Indexmenge der Bahnen isotroper Ebenen als Teilmenge der Grassmannschen $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^3(\mathbb{Z}_q))$ auffassen. Man kann jede Gerade in $\mathbb{P}^n$ durch ihre Plückerkoordinaten beschreiben. In unserem Fall sind diese durch

$$p_{ij} = \det \begin{pmatrix} \bar{v}_i & \bar{w}_i \\ \bar{v}_j & \bar{w}_j \end{pmatrix}$$

für eine Gerade $\overline{v} \wedge \overline{w} \in \mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^3(\mathbb{Z}_q))$ gegeben: bekanntlich ist (p_{ij}) genau dann in $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^3(\mathbb{Z}_q))$, falls

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

gilt.
Eine Gerade in $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^3(\mathbb{Z}_2))$ repräsentiert genau dann isotrope Ebenen, wenn $\overline{h} = \overline{v} \wedge \overline{w}$ in $\mathbb{Z}_2$ isotrop ist, das heißt, wenn die Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} \overline{v}_1 & \overline{w}_1 \\ \overline{v}_3 & \overline{w}_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \overline{v}_2 & \overline{w}_2 \\ \overline{v}_4 & \overline{w}_4 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist.

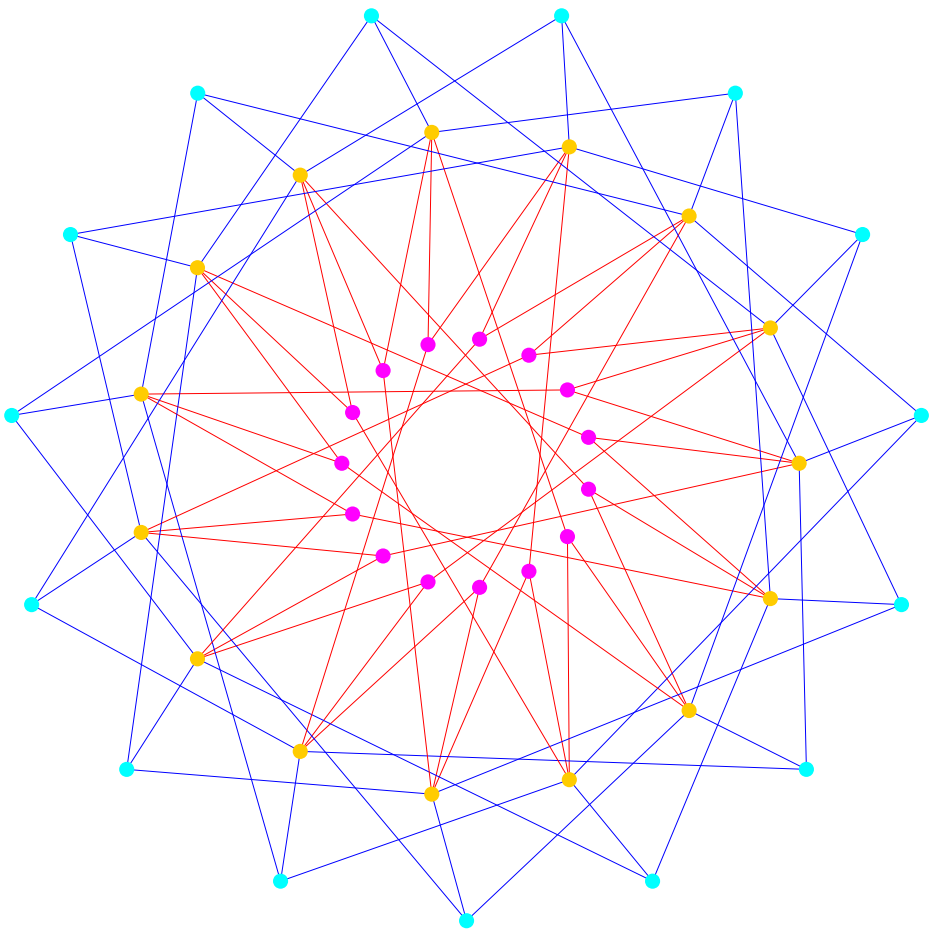

Bild 3: $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}(2))$

Eine Ebene ist also genau dann isotrop, wenn für ihre Plückerkoordinaten $p_{13} = p_{34}$ in $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{P}^3(\mathbb{Z}_q))$ gilt. Die Bahnen der isotropen Ebenen entsprechen daher den Lösungen in $\mathbb{P}^4(\mathbb{Z}_q)$ von $x_0x_1 + x_2x_3 + x_4^2 = 0$.
Im Fall $q = 2$ kann man sich diese dann folgendermaßen veranschaulichen. Den Raum $\mathbb{P}^3(\mathbb{Z}_2)$ stellen wir uns durch die Punkte dar, die bei der baryzentrischen Unterteilung eines Tetraeders entstehen. Dies sind genau 4 Eckpunkte, 6 Kantenmittelpunkte, 4 Flächenmittelpunkte und ein Schwerpunkt, also ingesamt 15 Punkte. Die Koordinaten der Eckpunkte seien $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ und $(0,0,0,1)$. Die Koordinaten der anderen ergeben sich dann durch Addition. In dieses Gebilde können wir dann die 15 projektiven Geraden eintragen, die Bahnen isotroper Ebenen entsprechen:

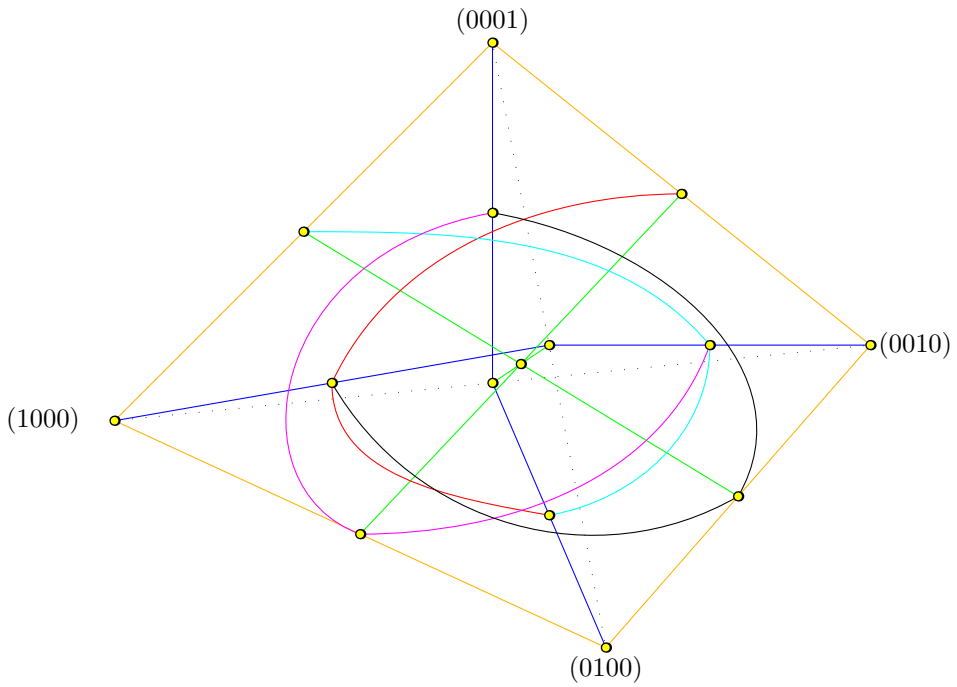

Bild 4: $\mathbb{P}^3(\mathbb{Z}_2)$ und die Bahnen isotroper Ebenen im Fall $q = 2$

Literatur

[BN] W. Barth, I. Nieto, *Abelian surfaces of type* $(1,3)$ *and quartic surfaces with 16 skew lines*, J. Alg. Geom **3** (1994), 173–222.

[F] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, Grundlehren 254, Springer, Berlin 1983.

[Fr] M. Friedland, *Das Titsgebäude von Siegelschen Modulgruppen vom Geschlecht* 2. Diplomarbeit, Hannover 1997.

[H] K. Hulek, *Elliptische Kurven, abelsche Flächen und das Ikosaeder*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **91** (1989), 126–147.

[HW] K. Hulek, S. Weintraub, *Bielliptic abelian surfaces*, Math. Ann. **283** (1989), 411–429.

[HKW] K. Hulek, C. Kahn & S. Weintraub, *Moduli spaces of abelian surfaces: Compactification, degenerations and theta functions.* de Gruyter 1993.

[Sh] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic function*, Princeton University Press 1971

[Zi] J. Zintl, *Invarianten von kompaktifizierten Modulräumen polarisierter abelscher Flächen*, Dissertation, Hannover

Anschrift der Autoren:

M. Friedland
Institut für Mathematik
Universität Hannover
Postfach 6009
D 30060 Hannover
Germany

friedland@math.uni-hannover.de

G.K. Sankaran
Department of
Mathematical Sciences
University of Bath
Bath BA1 2SS
England

gks@maths.bath.ac.uk