Technische Universität München
Fakultät für Mathematik

Über das Iterationsverhalten von postsingulär endlichen Exponentialabbildungen

Diplomarbeit von Johannes Zimmer

Aufgabensteller:	Prof. Dr. Konrad Königsberger
Betreuer:	Dierk Schleicher, PhD.
Abgabetermin:	15. November 1997

Hiermit erkläre ich, die Diplomarbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt zu haben.

München, den 15.8.1997

Einleitung

Komplexe Dynamik ist ein aktuelles und sich schnell entwickelndes Gebiet. In der Öffentlichkeit sind vor allem die „bunten Bilder“ bekannt geworden; zugleich hat die komplexe Dynamik neuen Schwung in die Funktionentheorie gebracht. Untersucht man die Ergebnisse dieses Arbeitsgebiets näher, so wird man rasch feststellen, daß die meisten Resultate Aussagen über Polynome und rationale Funktionen machen. Ergebnisse für transzendente ganze Funktionen sind jedoch auffallend rar gesät. Woran liegt das? Für Polynome existiert ein gut ausgebauter Apparat zur Untersuchung des Iterationsverhaltens — und wesentliche Ideen dabei sind, daß

1. die Dynamik ganz wesentlich von der Struktur (vor–)periodischer Punkte geprägt wird und
2. die Struktur repulsiver (vor–)periodischer Punkte durch die von A. Douady und J. Hubbard eingeführten „dynamischen Strahlen“ gut beschrieben werden kann.

Dynamische Strahlen sind ein zentrales Mittel, um das Iterationsverhalten komplexer Polynome zu verstehen. Es liegt nun auf der Hand, dynamische Strahlen für transzendente ganze Funktionen definieren zu wollen. Die Definition der dynamischen Polynomstrahlen läßt sich nicht direkt übertragen: Bei deren Definition wird ausgenützt, daß ∞ ein superattraktiver Punkt ist und daher ein Bassin von Unendlich existiert, in dem die Dynamik (fast eindeutig) zu $z \mapsto z^d$ konjugiert ist und sich so ein (fast) kanonisches Koordinatensystem für das Bassin von Unendlich ergibt. Wir betrachten hier die Funktionen $z \mapsto \lambda \exp(z)$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Die Julia–Menge dieser Funktionen ist oft die ganze komplexe Ebene und in jedem Fall unbeschränkt — es existiert also kein Bassin von Unendlich. Daher müssen andere Wege beschritten werden, um dynamische Strahlen für diese Funktionen zu definieren (wobei die wichtigsten Eigenschaften dynamischer Polynomstrahlen natürlich auch für die neu definierten dynamischen Strahlen gelten sollen). Eine Reihe von Arbeiten unternimmt erste Schritte in diese Richtung — am wichtigsten ist wohl [DGH86]. Dennoch sind die Ergebnisse in mancherlei Hinsicht nicht voll befriedigend: Oft wird vorausgesetzt, daß λ ein reeller Parameter ist, oder die Existenz von dynamischen Strahlen wird nur unter starken Voraussetzungen gezeigt, die aus der Theorie der Polynome unbekannt sind (auf den besonders gut verstandenen Fall quadratischer Polynome übertragen könnte man beispielsweise nur die Existenz eines einzigen dynamischen Strahls zeigen, obwohl in Wirklichkeit für jeden Winkel in $\mathbb{R} \bmod 2\pi$ ein dynamischer Strahl existiert). Wichtigstes Ziel dieser Arbeit ist es, die Theorie in dieser Hinsicht weiterzuentwickeln.

Das Vorgehen im einzelnen sieht so aus: **§1** dient hauptsächlich dazu, grundlegende Begriffe einzuführen. Die dort zitierten Sätze und Prinzipien sind Allgemeinwissen in der komplexen Dynamik. Deshalb ist dieser Abschnitt kurz gehalten.

In **§2** werden Julia–Mengen und Fatou–Mengen ganzer Funktionen eingeführt. Anschließend werden die wichtigsten Eigenschaften dieser Mengen gezeigt. Das Material dieses Paragraphen ist nicht neu; jedoch sind diese Aussagen über ganze Funktionen nur schwer oder gar nicht in der Literatur zu finden.

Dann werden die ausgetretenen Pfade verlassen: In **§3** definieren wir postsingulär endliche Parameter („PSP-Parameter") als die Parameter $\lambda \in \mathbb{C}^*$, für die der singuläre Orbit von $z \mapsto \lambda \exp(z)$ endlich ist. Das Iterationsverhalten dieser Funktionen wollen wir untersuchen. Anschließend werden Spinnen und Spinnenräume (ein Spezialfall der Teichmüllerräume) eingeführt. Wir beweisen für die von uns betrachtete Funktionenklasse auf elementare Weise die Existenz einer „Fixspinne". Auch wenn dieses Ergebnis für sich genommen schon interessant ist, dient es doch vor allem dazu, Aussagen über dynamische Strahlen machen zu können.

§4 schließt zunächst eng an [DGH86] an: Es wird eine spezielle Art von Strahlen definiert; eine ähnliche Funktion wie in [DGH86] parametrisiert einen Strahl. Jedoch hoffen wir, daß unser Beweis systematischer und leicht auf andere Familien (z.B. die Standardfamilie $z \mapsto \lambda z \exp(z)$) übertragbar ist. Zu beachten ist, daß unsere Definition von dynamischen Strahlen in §4 von der aus [DGH86] abweicht und so die Beschränkungen jener Arbeit umgangen werden können — auch wenn noch zu zeigen ist, daß die in §4 eingeführten dynamischen Strahlen tatsächlich die gewünschten Eigenschaften haben. Das ist die Aufgabe von **§5**. Obwohl vom Umfang her einer der kürzesten Paragraphen, finden sich hier die zentralen Aussagen. Bewiesen wird unter anderem, daß (vor–)periodische dynamische Strahlen an (vor–)periodischen Punkten landen und umgekehrt jeder (vor–)periodische Punkt Landepunkt mindestens eines (vor–)periodischen dynamischen Strahls ist. Diese Ergebnisse sind neu und entsprechen genau den eingangs erwähnten Umständen im Polynomfall. Damit ist die Tür geöffnet, bekannte Ergebnisse aus der Iterationstheorie von Polynomen auf die hier betrachtete Exponentialfamilie zu übertragen. Insbesondere ist bei Polynomen bekannt, daß dynamische Polynomstrahlen Aussagen über die Struktur des Parameterraums ermöglichen; eine interessante Frage ist also, ob das für Funktionen aus der Exponentialfamilie ebenfalls zutrifft.

In **Anhang A** wird beschrieben, wie Spinnen in sehr elementarer, computergeeigneter Weise beschrieben werden können; in **Anhang B** schließlich wird ein Computerprogramm erläutert, dessen Aufgabe es ist, iterativ eine Fixspinne zu konstruieren.

Zum Schluß möchte ich mich herzlich bedanken: Zunächst bei Herrn Prof. Königsberger für die vielfältige Unterstützung der ganzen Arbeitsgruppe über komplexe Dynamik; John Milnor und Dierk Schleicher möchte ich vielmals danken für die Möglichkeit, ein Semester in Stony Brook, NY, zu verbringen. Von der dortigen Gastfreundschaft und der anregenden Atmosphäre habe ich sehr profitiert. Ganz besonders fruchtbar waren die Diskussionen mit Adam Epstein, Jan Kiwi und Duncan Sands. Ein herzliches Dankeschön allen, die das Manuskript ganz oder teilweise gelesen haben, insbesondere natürlich Heidrun Mündlein. Der tiefste Dank gilt jedoch meinem Betreuer, Dierk Schleicher. Unnötig zu sagen, daß die allermeisten Ideen dieser Arbeit auf ihn zurückgehen. Die Zusammenarbeit war nicht nur fachlich interessant und herausfordernd, sondern auch menschlich bereichernd. Dankeschön!

München, im Juli 1997 Johannes Zimmer

Inhaltsverzeichnis

§1. Vokabular

In diesem Abschnitt rekapitulieren wir einige Begriffe aus der Iterationstheorie holomorpher Funktionen. Von besonderem Interesse sind dabei die Familie $\mathcal{E}$ der Exponentialfunktionen $E_\lambda\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \lambda \exp(z)$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ und die Familie $\mathcal{P}$ der Polynome $P_{\lambda,d}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \lambda(1+z/d)^d$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ und $d \in \mathbb{N}^* := \{1,2,\ldots\}$, $d \geq 2$.

§1.1 Grundbegriffe

Ist nichts weiteres gesagt, so soll es sich bei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ immer um eine ganze Funktion handeln. Iterierte von f werden mit $f^{\circ n}$ bezeichnet.

Eine grundlegende Beobachtung in der komplexen Dynamik ist, daß das Verhalten von Punkten mit verschwindender Ableitung die Dynamik der ganzen Abbildung in hohem Maße prägt. Deshalb tragen diese Punkte spezielle Namen:

(1.1) Definition. (Kritischer Punkt, kritischer Wert)
*Ein Punkt $p \in \mathbb{C}$ mit verschwindender Ableitung $f'(p) = 0$ heißt **kritischer Punkt**, sein Bild $f(p)$ ist ein **kritischer Wert**.*

Dynamisch bedeutsam sind weiterhin ***periodische Punkte***. Das sind Punkte, die von f nach endlich vielen Schritten wieder auf sich selbst abgebildet werden. Ein Spezialfall davon sind Punkte, die unter f invariant sind: sogenannte ***Fixpunkte***.

Eine erste Klassifizierung der Fixpunkte läßt sich anhand des Betrages ihrer Ableitung vornehmen:

(1.2) Definition. (Attraktive, repulsive, indifferente Fixpunkte)
*Ist z_0 ein Fixpunkt von f, so nennt man den Wert $\mu := f'(z_0)$ den **Multiplikator** von f bei z_0.*

- *Ist $|\mu| < 1$, so heißt z_0 **attraktiver Fixpunkt**, im Fall $\mu = 0$ sogar **superattraktiv**.*
- *Ist $|\mu| > 1$, so heißt z_0 **repulsiv**.*
- *Im Fall $|\mu| = 1$ ist z_0 **indifferent**. Indifferente Fixpunkte werden noch weiter unterschieden: Gilt $\mu = e^{2\pi i\theta}$ mit irrationalem θ, so heißt z_0 **irrational indifferent**, andernfalls (also θ rational) **rational indifferent**.*

Ist z_0 ein (super-)attraktiver Fixpunkt, so nennt man die Menge aller Punkte, die unter Iteration gegen z_0 konvergieren, das ***(super-)attraktive Bassin*** von z_0. Die Zusammenhangskomponente, die den Fixpunkt z_0 enthält, wird als ***unmittelbares Bassin*** bezeichnet.

Diese Begriffe sind zunächst nur für Fixpunkte eingeführt; da periodische Punkte mit der Periode n aber Fixpunkte für $f^{\circ n}$ sind, lassen sich obige Definitionen unmittelbar auf periodische Punkte übertragen.

Durch die geschickte Wahl eines Koordinatensystems läßt sich oft erreichen, daß die dynamischen Eigenschaften einer gegebenen Funktion klarer hervortreten und einfacher handzuhaben sind. Das geschieht mit Hilfe der Konjugation:

(1.3) Definition. (Topologische Konjugation)
Sind U, V zwei topologische Räume, so sind zwei stetige Funktionen $f: U \to U$ und $g: V \to V$ ***topologisch konjugiert****, wenn ein Homöomorphismus $\phi: U \to V$ existiert, so daß $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ gilt.*

Bemerkung. Bisweilen muß man diese Definition leicht modifizieren: Will man etwa eine Funktion in einer Umgebung eines repulsiven Fixpunktes konjugieren, so ist der Bildbereich im allgemeinen größer als der Definitionsbereich. Die Definition läßt sich dann so erweitern: Zwei stetige Funktionen $f: U \to U'$ und $g: V \to V'$ mit $U' \supseteq U$ und $V' \supseteq V$ sind konjugiert, wenn ein Homöomorphismus $\phi: U' \to V'$ existiert, der sich auf einen Homömorphismus $U \to V$ beschränken läßt, der die obige Funktionsgleichung erfüllt.

Selbstverständlich ist die Konjugation für uns nur dann ein sinnvolles Konzept, wenn die wichtigsten dynamischen Eigenschaften konjugationsinvariant sind. Für die topologische Konjugation gilt, daß Fixpunkte auf Fixpunkte abgebildet werden; ist f differenzierbar und ϕ ein Diffeomorphismus, so ändern Fixpunkte ihren Charakter nicht: attraktive Punkte bleiben attraktiv, entsprechendes gilt für repulsive bzw. indifferente Punkte.

Zur eindeutigen Beschreibung kennzeichnen wir die Grenzwerte nach oben bzw. nach unten unbeschränkter reeller Funktionen mit $+\infty$ bzw. $-\infty$ und unterscheiden sie so von dem Punkt ∞ der Riemannschen Zahlenkugel. Manchmal ist es für das Studium ganzer Funktionen hinderlich, die komplexe Ebene durch einen Punkt zu kompaktifizieren. Deshalb wird gelegentlich auch $+\infty$ als Grenzwert einer Folge komplexer Zahlen bezeichnet, sofern die Folge der Imaginärteile beschränkt ist und die Folge der Realteile gegen $+\infty$ strebt; analog steht $-\infty$ als Grenzwert einer komplexen Folge, falls die Folge der Imaginärteile beschränkt ist und die Folge der Realteile gegen $-\infty$ konvergiert. $\hat{\mathbb{C}}$ steht für $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{N}$ schließlich ist die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null, $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} - \{0\}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null.

Ein Schwerpunkt der komplexen Dynamik liegt auf dem Studium des Iterationsverhaltens von Polynomen. Besonders intensiv studiert ist die Klasse der Polynome $z \mapsto z^d + c$ mit $c \in \mathbb{C}$ und $d \in \mathbb{N}^*$. Durch Konjugation können wir diese Polynome in eine für uns besser geeignete Form transformieren: Die affine Abbildung $\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{d}{c}z - d$ konjugiert $z \mapsto z^d + c$ zu $z \mapsto \lambda\big(1 + z/d\big)^d$ mit $\lambda = dc^{d-1}$. Diese Darstellung hat für uns den Vorteil, daß sich im Grenzwert die Funktion $\lim_{d\to+\infty} \lambda\big(1+z/d\big)^d$ aus der Exponentialfamilie $\mathcal{E}$ ergibt. Für $z \mapsto z^d + c$ ist 0 der kritische Punkt und c der kritische Wert; das dazu konjugierte Polynom $z \mapsto \lambda\big(1+z/d\big)^d$ hat $-d$ als kritischen Punkt und 0 als kritischen Wert unabhängig von c. Für $d \to +\infty$ wandert der kritische Punkt $-d$ nach $-\infty$, während der kritische Wert 0 konstant bleibt. Bei 0 handelt es sich um einen Wert, der nicht im Bildbereich von E_λ liegt. Er wird gemäß der folgenden Definition als asymptotischer Wert bezeichnet:

(1.4) Definition. (Asymptotischer Wert)
Sei f eine ganze Funktion und Γ eine Kurve, die sich nach Unendlich erstreckt:

$$\lim_{t\to+\infty} \Gamma(t) = \infty.$$

Existiert weiterhin

$$\lim_{t\to+\infty} f\big(\Gamma(t)\big) =: w \in \mathbb{C},$$

*so wird w als **asymptotischer Wert** von f bezeichnet.*

Für die Funktion E_λ erfüllt jede Kurve Γ mit $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Re}\big(\Gamma(t)\big) = -\infty$ die Voraussetzungen der Definition. Damit ist 0 ein asymptotischer Wert der Exponentialfunktion E_λ.

Eine Gemeinsamkeit von kritischen und asymptotischen Werten zeigt das folgende Lemma:

(1.5) Lemma. (Kritische und asymptotische Werte)
Ist f eine ganze Funktion mit endlich vielen asymptotischen und kritischen Werten, so ist die Menge der asymptotischen und kritischen Werte genau die Menge der Punkte, für die in einer beliebigen Umgebung keine (unverzweigte) Überlagerung existiert.

Beweis: Aus den Definitionen folgt, daß für asymptotische und kritische Werte in keiner Umgebung eine unverzweigte Überlagerung existiert; zu zeigen ist also nur noch, daß jeder Verzweigungspunkt x kritischer oder asymptotischer Wert ist. Sei U eine Umgebung von x, so daß U keinen weiteren Verzweigungspunkt enthält. Wir wählen einen Weg $s\colon [0,1] \to U$ mit $s(1) = x$; sei $s(0) =: y$. Jede Wahl von $\tilde{y} \in f^{-1}(y)$ bestimmt einen eindeutigen Lift $\tilde{s}\colon [0,1) \to \hat{\mathbb{C}}$ mit $\tilde{s}(0) = \tilde{y}$. Gilt $\tilde{s}(t) \to z \in \mathbb{C}$ für $t \to 1$, so folgt $f(z) = \lim_{t\to 1} s(t) = x$. Also läßt $\tilde{s}$ sich entweder zu einem abgeschlossenen Weg in $\mathbb{C}$ fortsetzen oder erstreckt sich nach Unendlich. Ist jeder Lift in $\mathbb{C}$ beschränkt, so endet ein Lift an einem kritischen Punkt von f; also ist x ein asymptotischer oder kritischer Wert. □

Wegen dieser Gemeinsamkeit werden asymptotische und kritische Werte auch als singuläre Werte bezeichnet.

(1.6) Definition. (Singulärer Orbit)
*Der Orbit eines kritischen oder eines asymptotischen Wertes wird auch **singulärer Orbit** genannt, und allgemein steht **singulär** für „kritisch oder asymptotisch“. Die **postsinguläre Menge** ist definiert als Abschluß der Vorwärtsorbits der singulären Werte. Bezeichne V hier die Menge der singulären Werte, so gilt also*

$$P(f) := \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f^{\circ n}(s) \mid s \in V\}}.$$

Also ist 0 ein singulärer Wert für E_λ und $\{E_\lambda^{\circ j}(0) \mid j \geq 0\}$ ein singulärer Orbit; da $E_\lambda\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ eine unverzweigte Überlagerung ist, ist 0 auch der einzige singuläre Wert für E_λ und $\{E_\lambda^{\circ j}(0) \mid j \geq 0\}$ der einzige singuläre Orbit.

Zum Schluß dieses Abschnitts wird noch an das Konzept der normalen Familie erinnert.

Eine Folge $(f_j)_{j\geq 0}$ von holomorphen Funktionen $f_j\colon U \to \hat{\mathbb{C}}$ mit $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ offen heißt ***kompakt konvergent*** in U, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq U$ gleichmäßig konvergiert.

(1.7) Definition. (Normale Familie)
Ist J eine beliebige unendliche Indexmenge und $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ offen, so nennt man eine Familie $\{f_j\}_{j\in J}$ holomorpher Funktionen $f_j\colon U \to \hat{\mathbb{C}}$ ***normal****, wenn jede unendliche Teilfamilie eine Teilfolge enthält, die in U kompakt gegen eine Funktion $U \to \hat{\mathbb{C}}$ konvergiert.*

In dieser Definition ist die Konvergenz gegen die Funktion, die konstant den Wert ∞ annimmt, nicht ausgeschlossen; dabei wird die Topologie der Riemannschen Zahlenkugel zugrundegelegt.

Der nächste Satz zeigt, daß Normalität keine so einschränkende Bedingung ist, wie es die Definition vermuten läßt. Der folgende Satz charakterisiert normale Familien auf eine interessante Weise:

(1.8) Satz. (Satz von Montel)
Sei J eine Indexmenge und $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ offen. Eine Familie $\{f_j\}_{j\in J}$ holomorpher Funktionen $f_j\colon U \to \hat{\mathbb{C}}$ ist normal, wenn mindestens drei Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$ existieren, die von keiner Funktion aus der Familie als Bild angenommen werden.

Der *Beweis* findet sich beispielsweise in [Mil90].

(1.9) Satz. (Normalität ist eine lokale Eigenschaft)
Ist eine Familie von Funktionen normal in einer Umgebung jedes Punktes eines Gebietes $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$, so ist diese Familie in ganz U normal.

Siehe etwa [Sch97] für den *Beweis*.

§2. Julia–Mengen und Fatou–Mengen

Die Julia–Menge und die Fatou–Menge werden eingeführt und es wird gezeigt, daß die Julia–Menge spezieller Funktionen die ganze komplexe Ebene ist; dazu wird die Klassifizierung der Fatoukomponenten ganzer Funktionen von endlichem Typ kurz skizziert.

§2.1 Definition und elementare Eigenschaften

Untersucht man, wie sich eine gegebene holomorphe Funktion f unter Iteration verhält, so gibt es grob gesprochen zwei Arten von Punkten: Die einen, in deren Umgebung die Dynamik ein „stabiles", überschaubares und „zahmes" Verhalten zeigt, während die Dynamik in der Umgebung der anderen Punkte kompliziert, vielfältig und instabil ist. Die Punkte mit simplem dynamischen Verhalten bilden die Fatou–Menge, die mit der komplizierten Dynamik die Julia–Menge. Diese beiden Begriffe sind für die komplexe Dynamik fundamental und werden folgendermaßen definiert:

(2.1) Definition. (Julia–Menge, Fatou–Menge)
*Die **Fatou–Menge** $\mathcal{F}$ einer holomorphen Funktion f ist die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C}$, für die eine Umgebung $U(z)$ existiert, so daß $\{f^{\circ m}\}_{m \geq 0}$ auf $U(z)$ eine normale Familie bildet. Die **Julia–Menge** $\mathcal{J}$ ist das Komplement der Fatou–Menge in $\mathbb{C}$.*

Einige Tatsachen über die Julia–Menge und die Fatou–Menge lassen sich umittelbar ableiten:

(2.2) Lemma. (Grundlegende Eigenschaften)
Die Fatou–Menge ist offen, die Julia–Menge ist abgeschlossen. Beide Mengen sind vollständig invariant, d.h. $f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} = f(\mathcal{F})$ und analog $f^{-1}(\mathcal{J}) = \mathcal{J} = f(\mathcal{J})$.

Beweis: Die Fatou–Menge ist definitionsgemäß offen, also ist die Julia–Menge abgeschlossen. — Zur vollständigen Invarianz: Ist $z \in \mathcal{F}$, so existiert nach Definition eine Umgebung U von z, so daß jede unendliche Teilfamilie von $\{f_j\}_{j \in J}$ eine Teilfolge enthält, die in U kompakt konvergiert. Das Urbild von U ist offen, da f stetig ist; das Prinzip der offenen Abbildung garantiert, daß das Bild von U ebenfalls offen ist. Die kompakte Konvergenz gilt dann auch für diese Umgebungen. Und aus der vollständigen Invarianz von $\mathcal{F}$ folgt sofort die vollständige Invarianz von $\mathcal{J}$. □

Ein Ergebnis von Fatou zeigt, daß die Julia–Menge ganzer nichtlinearer Funktionen niemals die leere Menge ist, siehe [Fat26]. Für die Fatou–Menge ist das falsch: Es werden später Beispiele gezeigt, in denen die Julia–Menge die ganze komplexe Ebene ist.

(2.3) Lemma. (Gestalt der Julia–Menge)
Die Julia–Menge hat entweder kein Inneres oder ist die ganze komplexe Ebene.

Beweis: Angenommen, es existiert eine offene Teilmenge U von $\mathcal{J}$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}^*$ wegen der Invarianz $f^{\circ n}(U) \subseteq \mathcal{J}$. Nach dem Satz von Montel gilt aber auch, daß $\{f(U), f^{\circ 2}(U) \dots\}$ ganz $\hat{\mathbb{C}}$ mit Ausnahme von höchstens zwei Punkten enthält. Da die Julia–Menge eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, folgt $\mathcal{J} = \mathbb{C}$. □

Das folgende Lemma oder genauer gesagt sein Beweis illustriert, wie stark das Konzept der normalen Familien ist. Für dieses Lemma bezeichne J die Menge der Punkte, die weder singulär sind noch einen singulären Punkt als einziges Urbild haben.

(2.4) Lemma. (Rückwärtsbilder liegen dicht in der Julia–Menge)
Die Rückwärtsbilder jedes Punktes aus $\mathcal{J} - J$ liegen dicht in der Julia–Menge.

Mit anderen Worten: Ist $p \in \mathcal{J} - J$, so gilt

$$\mathcal{J} = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{\circ -n}(p)}.$$

Beweis: Ist $z \in \mathcal{J}$ ein Punkt der Julia–Menge und U eine beliebige Umgebung dieses Punktes, so enthält die Menge aller Vorwärtsbilder $f(U), f^{\circ 2}(U), \dots$ ganz $\hat{\mathbb{C}}$ mit Ausnahme von höchstens zwei Punkten. Diese „Ausnahmepunkte“ liegen, sofern sie nicht singulär oder Bild eines singulären Punktes sind, wegen der vollständigen Invarianz in der Fatou–Menge: Bezeichnet E die Menge dieser Punkte, so gilt definitionsgemäß $f^{-1}(E) \subseteq E$, also ist jeder Punkt aus E periodisch mit Periode 1 oder 2; diese Punkte sind superattraktiv und liegen damit in der Fatou–Menge.

Also treffen die Vorwärtsbilder $f(U), f^{\circ 2}(U), \dots$ jeden Punkt aus $\mathcal{J} - J$, und da die Umgebung U beliebig klein gewählt werden kann, liegt z damit im Abschluß der Menge aller Rückwärtsiterierten eines beliebigen solchen Punktes. □

§2.2 Die komplexe Ebene als Julia–Menge

Julia–Mengen von Polynomen sind oft sehr komplex und für unsere Begriffe ästhetisch; auch in der Öffentlichkeit sind sie populär geworden. Die Julia–Menge der Exponentialfunktion $E\colon z \mapsto \exp(z)$ ist hingegen optisch nicht sehr eindrucksvoll, da $\mathcal{J}\big(\exp(z)\big) = \mathbb{C}$ gilt. Der Vorwurf, komplexe Dynamik sei die Wissenschaft der bunten Bilder, trifft also zumindest für die Dynamik der Exponentialfunktion nicht zu!

Bemerkung. Die Tatsache, daß die Julia–Menge der Exponentialfunktion die ganze komplexe Ebene ist, mag suggerieren, daß die Julia–Menge von $\exp(z)$ eine unstrukturierte Menge ist. Doch wird im Lauf dieser Arbeit eine Struktur entwickelt, und sicherlich gibt es noch viel tiefere — und schöne — Strukturen in der Julia–Menge der Exponentialfunktion zu entdecken.

Die Vermutung, daß $\mathcal{J}(e^z) = \mathbb{C}$ gilt, stammt von Fatou (siehe [Fat26]); der erste Beweis dafür wurde erst etwa 60 Jahre später gefunden [Mis81]. Im folgenden werden die (im nächsten Abschnitt definierten) Fatoukomponenten einer speziellen Klasse ganzer Funktionen — die Exponentialfunktion eingeschlossen — systematisch klassifiziert. Anschließend läßt sich dann für spezielle Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ leicht zeigen, daß die Juliamenge von E_λ die ganze komplexe Ebene ist.

Eine Zusammenhangskomponente der Fatou–Menge wird ***Fatoukomponente*** genannt. Aus der Invarianz von Julia–Menge und Fatou–Menge und dem Prinzip der offenen Abbildung folgt, daß das Bild einer Fatoukomponente unter f wieder eine Fatoukomponente ist. Deshalb lassen sich Fatoukomponenten durch ihren Orbit charakterisieren: Ist U eine Fatoukomponente, so bestehen prinzipiell folgende Möglichkeiten:

1) Es gilt $f^{\circ n}(U) = U$ für ein $n \in \mathbb{N}^*$, die Fatoukomponente wird also nach endlich vielen Schritten auf sich selber abgebildet. Dann ist U ***periodisch***, im Fall $n = 1$ heißt U auch ***Fixkomponente*** von $\mathcal{F}$.
2) U wird nach endlich vielen Schritten auf eine periodische Komponente abgebildet, ist aber selber nicht periodisch. In diesem Fall ist U ***vorperiodisch***.
3) Andernfalls gilt $f^{\circ m}(U) \cap f^{\circ n}(U) = \emptyset$ für alle $m > n$. U ist dann ein ***wanderndes Gebiet***.

Ein Meilenstein der komplexen Dynamik ist ein Satz von Sullivan, der die dritte Möglichkeit — wandernde Gebiete — für Fatoukomponenten rationaler Funktionen ausschließt [Sul85].

In [EL84] und [GK86] wird dieses Ergebnis auf eine spezielle Klasse ganzer Funktionen übertragen. Diese Klasse $\mathcal{S}$ ist die Menge der ganzen Funktionen mit endlich vielen singulären Werten. Ist f eine ganze Funktion, so gilt $f \in \mathcal{S}$ also genau dann, wenn eine endliche Menge $\{a_1, \ldots, a_q\}$ von Punkten existiert, so daß $f\colon \mathbb{C} - f^{-1}\big(\{a_1, \ldots, a_q\}\big) \to \mathbb{C} - \{a_1, \ldots, a_q\}$ eine (unverzweigte) Überlagerung ist. $\mathcal{S}$ wird als Klasse der ganzen Funktionen von ***endlichem Typ*** bezeichnet.

Folgende Aussage findet sich in [EL84] und [GK86]:

(2.5) Satz. (Keine wandernden Gebiete)
Die Fatoukomponenten einer Funktion $f \in \mathcal{S}$ sind entweder periodisch oder vorperiodisch, niemals aber ein wanderndes Gebiet.

Da E_λ mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ nur 0 als singulären Wert besitzt (siehe §1), gilt $E_\lambda \in \mathcal{S}$ für $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Damit sind alle Fatoukomponenten ganzer Funktionen von endlichem Typ entweder periodisch oder vorperiodisch. Wenn die möglichen Typen periodischer Fatoukomponenten komplett beschrieben werden können, dann ist also ein vollständiger Überblick über alle Fatoukomponenten gewonnen. Um dieses Ziel zu erreichen, führen wir noch einige Begriffe ein.

(2.6) Definition. (Parabolische Fatoukomponente)
*Eine periodische Fatoukomponente U mit Periode n wird **parabolisch** genannt, wenn auf dem Rand ∂U ein rational indifferenter Fixpunkt z_0 für die Abbildung $f^{\circ n}$ existiert, so daß alle Punkte in U unter Iteration von $f^{\circ n}$ gegen z_0 konvergieren.*

(2.7) Definition. (Siegelscheibe)
*Eine einfach zusammenhängende periodische Fatoukomponente, auf der f konjugiert ist zu einer Drehung auf einer Kreisscheibe mit irrationalem Drehwinkel, heißt **Siegelscheibe**.*

Damit lassen sich die periodischen Fatoukomponenten ganzer Funktionen von endlichem Typ genau charakterisieren (siehe [EL84]):

(2.8) Satz. (Periodische Fatoukomponenten von Funktionen aus $\mathcal{S}$)
Ist U eine periodische Fatoukomonente einer ganzen Funktion f von endlichem Typ, so handelt es sich um genau eine der folgenden Arten:

- *Das unmittelbare Bassin eines (super-)attraktiven Zyklus,*
- *eine parabolische Fatoukomponente,*
- *eine Siegelscheibe.*

Für spezielle ganze Funktionen von endlichem Typ können wir jetzt zeigen, daß keine Fatoukomponenten existieren können, sprich: die Julia–Menge dieser Funktionen ist die ganze komplexe Ebene. Der nächste Satz ist aus [DGH86] entnommen.

(2.9) Satz. (Komplexe Ebene als Julia–Menge)
i) Ist für E_λ der Punkt 0 vorperiodisch, so gilt $\mathcal{J}(E_\lambda) = \mathbb{C}$.
ii) Gilt $E_\lambda^n(0) \to \infty$ für $n \to +\infty$, so folgt $\mathcal{J}(E_\lambda) = \mathbb{C}$.

Beweis: Alle Fatoukomponenten sind entweder periodisch oder vorperiodisch. Also reicht es zu zeigen, daß keine periodischen Fatoukomponenten existieren können. Die Funktion E_λ hat nur einen singulären Wert, nämlich 0. Im ersten Fall i) landet der singuläre Orbit auf einem repulsiven Zyklus, im zweiten Fall ii) strebt der singuläre Orbit nach Unendlich. Attraktive bzw. parabolische Bassins von Fixpunkten enthalten aber einen singulären Punkt (ein Beweis dieser Behauptung für rationale Abbildungen findet sich in [Mil90]; der Beweis läßt sich ohne weiteres auf ganze Abbildungen übertragen). Mit der Kettenregel folgt unmittelbar, daß gleiches für attraktive bzw. parabolische periodische Bassins gelten muß. Also können wir diese beiden Möglichkeiten ausschließen. Jeder Randpunkt einer Siegelscheibe liegt im Abschluß des Vorwärtsorbits eines singulären Wertes, vgl. [Mil90]. In beiden Fällen, also 0 vorperiodisch und $E_\lambda^n(0) \to \infty$ für $n \to +\infty$, ist der Abschluß der Vorwärtsorbits in $\mathbb{C}$ eine abzählbare Menge — also kann es auch keine Siegelscheiben geben. Damit ist die Julia–Menge die ganze komplexe Ebene. □

Bemerkung. Damit zeigt sich bereits ein großer Unterschied zum dynamischen Verhalten von Polynomen: Die Fatou–Menge $\mathcal{F}$ eines Polynomes kann niemals die leere Menge sein, denn für Polynome existiert immer eine offene Menge von Punkten, die nach Unendlich streben; diese Menge wird als Bassin von Unendlich bezeichnet. Auch wenn die Julia–Menge der Exponentialfunktion nicht so ästhetisch wie die Julia–Menge eines geeigneten Polynoms ist, so ist das Studium der Dynamik von Funktionen aus der Exponentialfamilie $\mathcal{E}$ um so interessanter und herausfordernder, da die

Dynamik in der Nähe jedes einzelnen Punktes kompliziert und „wild“ ist.

(2.10) COROLLAR.

i) $\mathcal{J}(k\pi i e^z) = \mathbb{C}$ *für* $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

ii) $\mathcal{J}(\lambda e^z) = \mathbb{C}$, *falls* $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1/e$.

Beweis: (Nach [DGH86]) Im ersten Fall wird 0 nach spätestens zwei Iterationen auf einen Fixpunkt abgebildet, während im zweiten Fall $E_\lambda^n(0) \to \infty$ für $n \to +\infty$ gilt.

□

BEMERKUNG. Auch hier macht sich das Fehlen des Bassins von Unendlich bemerkbar: Strebt 0 unter Iteration gegen Unendlich, so ist die Julia–Menge von $z \mapsto z^d + c$ mit $d \geq 2$ eine Cantormenge (der kritische Wert liegt in dem Bassin von Unendlich, siehe [Sch97]), die Julia–Menge der Exponentialfunktion hingegen ist ganz $\mathbb{C}$.

§3. Spinnen

In diesem Abschnitt werden Spinnen und die Spinnenabbildung eingeführt. Der zentrale Satz dieses Abschnitts zeigt dann für spezielle Funktionen aus der Exponentialfamilie $\mathcal{E}$ die Existenz einer Fixspinne — das ist ein Spinne, die äquivalent ist zur Bildspinne unter der zugehörigen Spinnenabbildung. Nachdem in §4 dynamische Strahlen eingeführt werden, wird diese Fixspinne ein wesentliches Hilfsmittel sein, wenn wir zeigen wollen, daß periodische und vorperiodische dynamische Strahlen landen. Die in §3.1 eingeführten Spinnenräume sind spezielle Teichmüllerräume; dennoch werden alle Beweise elementar und ohne Verwendung von Teichmüllertheorie geführt.

§3.1 Spinnen und die Spinnenabbildung

Hier untersuchen wir die Dynamik der Funktionen E_λ mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$; wie schon früher schreiben wir für E_1 kurz E (abweichend von der Notation, wie sie sich beispielsweise in [DGH86] findet: Dort gilt $E(t) := (1/e)\exp(t)$). Unser Ziel ist es, die Dynamik für einige Funktionen aus der Exponentialfamilie $\mathcal{E}$ zu beschreiben und dabei insbesondere die Beschränkung auf reelle Parameter λ, die sich in einer Reihe von Arbeiten findet, zu überwinden. Hier werden die Parameter $\lambda \in \mathbb{C}^*$ betrachtet, für die der singuläre Wert echt vorperiodisch ist. Diese Parameter verdienen einen eigenen Namen:

(3.1) Definition. (PSP-Parameter)
Ist der singuläre Wert 0 *vorperiodisch, so wird* λ *als* ***PSP-Parameter*** *bezeichnet.*

Die Bezeichnung PSP steht als Abkürzung für **p**ost**s**ingulär **p**räperiodisch. Also ist $\lambda \in \mathbb{C}^*$ genau dann ein PSP-Parameter, wenn die postsinguläre Menge

$$\overline{\{E_\lambda^{\circ j}(0) \mid j \geq 0\}}$$

endlich und damit vorperiodisch ist. Denn offensichtlich ist die postsinguläre Menge endlich, wenn der singuläre Orbit vorperiodisch, also endlich, ist. Und umgekehrt ist der singuläre Orbit im Fall einer postsingulär endlichen Menge als Teilmenge davon ebenfalls endlich, und damit echt vorperiodisch, da der singuläre Wert für E_λ niemals periodisch sein kann.

Generell wird im folgenden für einen PSP-Parameter die Vorperiode mit $l \in \mathbb{N}^*$ bezeichnet und die Periode mit $k \in \mathbb{N}^*$, $n := l + k$ (dabei sollen l und k jeweils minimal gewählt sein). $\Lambda_{l,k}$ bezeichnet die Menge aller Parameter $\lambda \in \mathbb{C}^*$, für die der singuläre Wert vorperiodisch mit der Vorperiode l und der Periode k ist. Λ ist die Menge aller Parameter, für die die postsinguläre Menge endlich ist, also die Vereinigung von $\Lambda_{l,k}$ über alle $l, k \in \mathbb{N}^*$.

Nachfolgend wird die Dynamik von E_λ im postsingulär endlichen Fall studiert; als anschauliche Einleitung wird erst einmal ein (notwendigerweise vage gehaltener) Überblick über die zu entwickelnden Konzepte und Sätze gegeben:

Ein zentrales Thema dieser Arbeit sind dynamische Strahlen. Grob gesagt handelt es sich dabei um Kurven, die sich nach Unendlich erstrecken und ein bestimmtes Iterationsverhalten zeigen (präzise Definitionen von dynamischen Strahlen und Iterationsverhalten folgen später). Wir untersuchen im folgenden den Fall eines endlichen postsingulären Orbits. Ein neues Ergebnis ist, daß dann ein Strahl existiert, der am singulären Wert landet. Um dies zu zeigen, werden zuerst andere Objekte studiert, die ähnliche Eigenschaften wie dieser dynamische Strahl zusammen mit seinen Vorwärtsbildern unter E_λ besitzen, aber wesentlich flexibler sind: sogenannte „Spinnen" und Äquivalenzklassen davon. Anschaulich besteht eine Spinne aus einem Körper und Beinen. Die Spinne sitzt auf der Riemannschen Zahlenkugel, der Körper auf dem Punkt ∞. Die Beine sind Kurven. Jedes Bein endet an einem Punkt des singulären Orbits (der singuläre Orbit ist also die Menge der „Füße"). Auf der Menge aller Spinnen definieren wir dann eine Äquivalenzrelation. Dadurch gewinnen wir die oben erwähnte größere Flexibilität im Vergleich zu dynamischen Strahlen: Jetzt betrachten wir Homotopieklassen von Kurven, dynamische Strahlen hingegen sind Kurven.

Ist gezeigt, daß Spinnenbeine einem bestimmten Iterationsverhalten genügen, ist es nicht mehr schwer zu zeigen, daß ein dynamischer Strahl existiert, der das gleiche Iterationsverhalten besitzt und am singulären Orbit landet.

Nun zur Definition von Spinnen:

(3.2) Definition. (Spinne)
*Sei $\lambda \in \Lambda$ und $\varrho \in \{0, \dots, n-1\}$. Ein **Bein** ist eine injektive Kurve $\gamma_\varrho \colon [0, +\infty] \to \hat{\mathbb{C}}$ mit folgenden Eigenschaften:*

i) $\gamma_\varrho(0) = E_\lambda^{\circ\varrho}(0)$ *und* $\gamma_\varrho(+\infty) = \infty$,

ii) $\mathrm{Re}\big(\gamma_\varrho(t)\big) \to +\infty$ *für* $t \to +\infty$,

iii) es existiert ein $M > 0$, *so daß* $\big|\mathrm{Im}\big(\gamma_\varrho(t)\big)\big| < M$ *für alle* $t \in [0, +\infty)$ *gilt.*

*Die Kollektion der n Beine $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ heißt **Spinne**, falls sich die Beine $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ nur im Punkt ∞ treffen. Zwei Spinnen $\phi, \hat{\phi}$ zum gleichen PSP-Parameter λ sind äquivalent, falls die Anordnung der Beine nahe Unendlich übereinstimmt und für alle $\varrho \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt, daß γ_ϱ und $\hat{\gamma}_\varrho$ zueinander homotop rel der Punkte $E_\lambda^{\circ\varrho}(0)$ mit $\varrho = 0, \dots, n-1$ sind. Der **Spinnenäquivalenzraum** oder einfach **Spinnenraum** ist die Menge dieser Äquivalenzklassen.*

Der Nomenklatur von [HS94] folgend werden die Punkte $E_\lambda^{\circ\varrho}(0) = \gamma_\varrho(0)$ mit $\varrho = 0, \dots, n-1$ ***Endpunkte*** der Spinne genannt. Der Endpunkt $\gamma_\varrho(0)$ des Beines γ_ϱ wird auch kurz mit z_ϱ bezeichnet.

Bemerkung. Diese Definition entspricht im wesentlichen der Definition aus [HS94], ist aber an unseren Fall angepaßt: Üblicherweise sind Spinnen nur bis auf Möbiustransformationen festgelegt; hier wird vereinbart, daß $\gamma_0(0) = 0$ und $\gamma_0(+\infty) = \infty$ gilt. Damit besteht prinzipiell noch eine Freiheit in der Skalierung der anderen Endpunkte.

In unserem Kontext ergibt sich die Skalierung zwangsläufig aus der Bedingung

$$E_\lambda^{\circ l-1}(0) = E_\lambda^{\circ n-1}(0) + 2\pi m,$$

wobei $m \in \mathbb{Z}$ durch die Kombinatorik gegeben ist. Diese Normierung fixiert die Endpunkte eindeutig. Ein formaler Unterschied besteht in der Definition der Äquivalenz: Wir verlangen, daß die Beine paarweise homotop zueinander rel der Endpunkte sind; in [HS94] ist die Äquivalenz über Homotopie der ganzen Spinne rel der Endpunkte definiert. Es läßt sich jedoch leicht sehen, daß diese beide Definitionen äquivalent sind.

Bemerkung. Spinnenräume sind spezielle Teichmüllerräume; Spinnen wurden von Hubbard und Schleicher benutzt, um aus einer gegebenen kombinatorischen Information (dem sogenannten externen Winkel) ein Polynom zu konstruieren, dessen kritischer Orbit den gegebenen externen Winkel besitzt, siehe [HS94]. In [SS] wird gezeigt, daß es unter bestimmten Bedingungen möglich ist, zu einer kombinatorischen Information eine Funktion aus der Exponentialfamilie $\mathcal{E}$ zu konstruieren, deren singulärer Orbit diese Kombinatorik besitzt. Diese Fragestellung ist in gewisser Weise zu dem vorliegenden Problem invers: In den beiden Arbeiten wird aus einer gegebenen kombinatorischen Information mit Hilfe von Spinnen eine Funktion konstruiert, deren singulärer Orbit die vorgegebene Kombinatorik besitzt. Hier ist die Funktion E_λ und damit der singuläre Orbit gegeben, und es wird gezeigt, daß eine Fixspinne existiert, die eine gewisse Kombinatorik liefert.

Grob gesagt sind Spinnen also Vereinigungen von Kurven, die den singulären Orbit mit ∞ verbinden. Da von den Kurven im wesentlichen nur verlangt sind, daß sie injektiv sind, sind die Äquivalenzklassen etwas unübersichtlich. Im Anhang A werden wir zeigen, daß aus jeder Äquivalenzklasse ein Repräsentant gewählt werden kann, der zweckmäßige Eigenschaften besitzt, etwa Beine aus endlich vielen Geradenstücken.

Bisher sind Spinnen noch keine dynamischen Objekte. Wünschenswert wäre es, die Dynamik des singulären Orbits auf die zugehörige Spinne zu übertragen. Jedoch ist das Vorwärtsbild einer Spinne im allgemeinen keine Spinne, da sich die Bilder zweier Beine unter E_λ schneiden können. Das Rückwärtsbild läßt sich jedoch definieren: Sei λ ein PSP-Parameter und ϕ eine Spinne für λ. Für jeden Punkt $z_\varrho := E_\lambda^{\circ\varrho}(0)$ existieren unendlich viele Urbilder $E_\lambda^{-1}(z_\varrho)$. Von der Dynamik her ausgezeichnet ist jedoch nur das Urbild $z_{\varrho-1}$. Definiert man diesen Punkt als Inverses unter der Exponentialfunktion von z_ϱ, so läßt sich für das Bein γ_ϱ von ϕ durch analytische Fortsetzung ein Inverses definieren. So kann man für jedes Bein von ϕ verfahren, das nicht am singulären Wert landet. Man kann leicht überprüfen, daß das so entstandene Objekt wieder eine Spinne ist (wobei die Beine, die an den Punkten z_{l-1} und z_{n-1} landen, beides Bilder des Beines mit Endpunkt $z_n := z_l$ sind). Damit ist eine Abbildung von der Menge aller Spinnen auf sich definiert. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß äquivalente Spinnen äquivalente Bilder haben. Also induziert diese Abbildung eine Abbildung des Spinnenraumes in sich.

(3.3) Definition. (Spinnenabbildung)
*Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein PSP-Parameter und ϕ eine Spinne zu diesem Parameter. Wählt man den Zweig von E_λ^{-1}, der den Endpunkt $z_\varrho := E_\lambda^{\circ\varrho}(0)$ mit $\varrho > 1$ auf $z_{\varrho-1}$ abbildet, so läßt sich diese Funktion durch analytische Fortsetzung für das ganze Bein γ_ϱ von ϕ definieren. Die Abbildung, die jedem Bein von ϕ so ein Bildbein zuordnet, induziert eine Abbildung der Menge der Spinnen in sich; sie wird **Spinnenabbildung** genannt. Äquivalente Spinnen haben unter der Spinnenabbildung äquivalente Bilder. Daher wird eine Abbildung des Spinnenraumes in sich induziert, die ebenfalls als Spinnenabbildung bezeichnet wird.*

Es ist zweckmäßig, das Bild eines Beines unter der Spinnenabbildung mit einer Tilde zu versehen: $\tilde{\gamma}_1$ ist also das Inverse von γ_2, das am Punkt $z_1 = E_\lambda^{\circ 1}(0)$ landet. Die Beine $\tilde{\gamma}_{n-1}$ und $\tilde{\gamma}_{l-1}$ sind beide Bilder von γ_l unter der Spinnenabbildung.

Die Spinnenabbildung macht Spinnen zu dynamischen Objekten; also ist es naheliegend, nach Spinnen zu suchen, die unter der Spinnenabbildung invariant bleiben. Oder zu fragen, ob eine Äquivalenzklasse von Spinnen existiert, die unter der Spinnenabbildung invariant ist. Eine Spinne, die äquivalent zu ihrem Bild unter der zugehörigen Spinnenabbildung ist, nennen wir ab jetzt kurz ***Fixspinne***. Bekannt ist: Ist der kritische Orbit von $z \mapsto z^d + c$ echt vorperiodisch, so existiert eine Fixspinne, deren Beine an diesem Orbit landen. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß sich dieses Ergebnis auch auf die Funktion E_λ (mit einem PSP-Parameter λ) übertragen läßt.

§3.2 Existenz einer Fixspinne

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, zu beweisen, daß im postsingulär endlichen Fall eine Fixspinne der Exponentialabbildung existiert.

Ist der kritische Orbit des Polynoms $z \mapsto \lambda(1+z/d)^d$ echt vorperiodisch, so lassen sich wie für postsingulär endliches E_λ Spinnen und Spinnenabbildung definieren. Für den Fall, daß der kritische Orbit von $z \mapsto \lambda(1+z/d)^d$ mit $d \geq 2$ echt vorperiodisch ist, wird in diesem Abschnitt die Existenz einer Fixspinne bewiesen. Dann wird gezeigt, daß sich die Fixspinne einer postsingulär endlichen Funktion E_λ aus der Fixspinne für die Abbildung $z \mapsto \tilde{\lambda}(1+z/d)^d$ konstruieren läßt, sofern $\tilde{\lambda}$ geeignet und der Grad d hoch genug gewählt wird.

Das nächste Lemma beschreibt die Approximation von E_λ im postsingulär endlichen Fall durch postkritische Polynome.

(3.4) Lemma. (Approximation durch postkritische Polynome)
Sei $\lambda \in \Lambda_{l,k}$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum, das die postsinguläre Menge umfaßt, und K' ein Teilkompaktum, das den singulären Wert nicht enthält. Dann existiert ein Polynom $P_{\tilde{\lambda},d}\colon z \mapsto \tilde{\lambda}(1+z/d)^d$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Der kritische Wert 0 von $P_{\tilde{\lambda},d}$ ist ebenfalls vorperiodisch mit Vorperiode l und Periode k.

ii) Es gilt $\|P_{\tilde{\lambda},d} - E_\lambda\|_K < \varepsilon$*; dabei bezeichnet* $\|\cdot\|_K$ *die Supremumsnorm auf* K *(insbesondere haben dann die Punkte des singulären Orbits von* E_λ *von den zugehörigen Punkten auf dem singulären Orbit von* $P_{\tilde{\lambda},d}$ *einen Abstand kleiner als* ε*).*

iii) Definiert man für jede injektive Kurve γ *in* K'*, die an einem vom singulären Wert verschiedenen Punkt des singulären Orbits landet und alle anderen Punkte des singulären Orbits vermeidet, das Inverse* $E_\lambda^{-1}(\gamma)$ *als analytische Fortsetzung des Urbildes auf dem singulären Orbit, so gilt für die entsprechende Wahl des Urbildes* $P_{\tilde{\lambda},d}^{-1}$ *die Abschätzung* $\|P_{\tilde{\lambda},d}^{-1} - E_\lambda^{-1}\|_{K'} < \varepsilon$*.*

Beweis: Sei eine kreisförmige Umgebung $U(\lambda)$ von λ so gewählt, daß $\|E_\lambda - E_\zeta\|_K < \varepsilon/2$ und (für geeignete Zweige) $\|E_\lambda^{-1} - E_\zeta^{-1}\|_{K'} < \varepsilon/2$ für $\zeta \in U(\lambda)$ gilt. Betrachtet man die analytischen Funktionen $f\colon U(\lambda) \to \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto E_\lambda^{\circ n}(0) - E_\lambda^{\circ l}(0)$ und $f_d\colon U(\lambda) \to \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto P_{\lambda,d}^{\circ n}(0) - P_{\lambda,d}^{\circ l}(0)$, so kann man gegebenenfalls durch Verkleinern von $U(\lambda)$ erreichen, daß der PSP-Parameter λ die einzige Nullstelle von f in $\overline{U(\lambda)}$ ist. Da f_d in $\overline{U(\lambda)}$ kompakt gegen f konvergiert, existiert ein Index $d_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $d > d_0$ die Funktionen f_d und f in $\overline{U(\lambda)}$ gleich viele Nullstellen haben, Vielfachheiten mitgezählt (Dies folgt aus dem Satz von Rouché, wenn man $\eta := \min\{|f(\xi)| \mid \xi \in \partial U(\lambda)\}$ setzt und d_0 so bestimmt, daß $|f_d - f|_{\partial U(\lambda)} < \eta$ für alle $d > d_0$ gilt: Dann gilt $|f_d(\xi) - f(\xi)| < |f(\xi)|$ für alle $\xi \in \partial U(\lambda)$, also haben f_d und f in $U(\lambda)$ nach Rouché gleich viele Nullstellen). Also existiert für jedes $d > d_0$ ein PSP-Parameter $\tilde{\lambda} \in U(\lambda)$ mit Vorperiode l und Periode k. Wählt man d so groß, daß $\|P_{\zeta,d} - E_\zeta\|_K < \varepsilon/2$ und für geeignete Zweige $\|P_{\zeta,d}^{-1} - E_\zeta^{-1}\|_{K'} < \varepsilon/2$ für alle $\zeta \in \overline{U(\lambda)}$ gilt, so folgt mit der Dreiecksungleichung $\|P_{\tilde{\lambda},d} - E_\lambda\|_K < \varepsilon$ und (für geeignete Zweige) $\|P_{\tilde{\lambda},d}^{-1} - E_\lambda^{-1}\|_{K'} < \varepsilon$. □

Im nächsten Schritt wollen wir zeigen, daß für Polynome im postkritisch endlichen Fall eine Fixspinne existiert, deren Beine am kritischen Orbit enden.

Für diesen Beweis ist noch eine kleine Vorbereitung nötig: Die ***gefüllte Julia–Menge*** eines Polynoms ist die Menge der Punkte, die unter Iteration nicht nach Unendlich entkommen; der Rand der gefüllten Julia–Menge ist die Julia–Menge. Die gefüllte Julia–Menge ist kompakt und voll (d.h. das Komplement ist zusammenhängend). Der Riemannsche Abbildungssatz garantiert die Existenz eines konformen Isomorphismus des Komplements der gefüllten Julia–Menge auf das Äußere der Einheitskreisscheibe. Dabei soll ∞ fixiert werden; damit ist die Riemannabbildung bis auf eine Drehung bestimmt. Die Urbilder radialer Strahlen in der dynamischen Ebene heißen dynamische Strahlen; um sie von später zu definierende Strahlen abzugrenzen, nennen wir sie vorläufig ***(dynamische) Polynomstrahlen*** (dies geschieht nur aus technischen Gründen; es wird sich herausstellen, daß die später definierten Strahlen genau die Eigenschaften haben, wie wir sie von dynamische Polynomstrahlen kennen).

(3.5) LEMMA. (Fixspinne für postkritisch endliche Polynome)
Ist der kritische Orbit für $P_{\lambda,d}: z \mapsto \lambda(1+z/d)^d$ *mit* $d \geq 2$ *echt vorperiodisch, so existiert eine Spinne aus dynamischen Polynomstrahlen, die am kritischen Orbit landen.*

Beweis: Im Beweis machen wir erhebliche Anleihen bei der Iterationstheorie komplexer Polynome: Ein wichtiger Satz besagt, daß, sofern die gefüllte Julia–Menge zusammenhängend ist, jeder periodische oder vorperiodische repulsive Punkt Landepunkt mindestens eines Polynomstrahls ist (und nur endlich viele Polynomstrahlen an diesem Punkt landen). Dieses Ergebnis ist nicht trivial, ein Beweis findet sich in [Sch97]. Darauf gestützt, wird der Beweis zum Kinderspiel: Die Voraussetzung ist hier erfüllt, da die gefüllte Julia–Menge zusammenhängend ist, sofern der kritische Orbit beschränkt ist, vergleiche [Sch97]; und der kritische Wert 0 springt auf einen repulsiven periodischen Zyklus.

Wir wählen einen Polynomstrahl aus, der am kritischen Wert landet (in dieser Wahl liegt eine mögliche Mehrdeutigkeit). Betrachtet man diesen Polynomstrahl und bildet alle seine Vorwärtsbilder, so landen sie genau an den Punkten des kritischen Orbits. Wir definieren die Fixspinne als Vereinigung aller dieser Polynomstrahlen (und Unendlich). Definiert man für die Punkte $P_{\lambda,d}^{\circ\varrho}(0)$ mit $\varrho = 1,\dots,n$ das Urbild $P_{\lambda,d}^{-1}$ als $P_{\lambda,d}^{\circ\varrho-1}(0)$, so läßt sich durch analytische Fortsetzung für jeden Polynomstrahl, der am kritischen Orbit landet, das Urbild definieren. Die Abbildung, die jedem Strahl so das Urbild zuordnet, ist die Polynomspinnenabbildung. Die Spinne aus Polynomstrahlen ist aber nach Konstruktion unter der Spinnenabbildung invariant. □

Um die Existenz einer Exponentialfixspinne im postsingulär endlichen Fall zeigen zu können, benötigen wir ein Lemma:

(3.6) LEMMA.
Sei ϕ *eine Spinne und* $\mathcal{C} := \{z_0,\dots,z_{n-1}\}$ *eine endliche Menge von Punkten, die paarweise mindestens den Abstand* $3a$, $a > 0$, *voneinander haben. Dann existiert eine zu* ϕ *äquivalente Spinne* ψ, *so daß jedes Bein von* ψ *höchstens eine der Kreisscheiben um einen der Punkte aus* $\mathcal{C}$ *mit Radius* a *berührt oder schneidet.*

Beweis: Sei s der maximale Kreisradius, so daß kein Bein γ_ϱ eine Kreisscheibe $K_s(z_\sigma)$, die den Endpunkt von γ_ϱ nicht enthält, schneidet. Ist $s \geq a$, so sind wir fertig. Sonst: Durch Nachschalten einer stückweise affinen Abbildung κ wird eine Kreisscheibe um z_ϱ und damit auch γ_ϱ so modifiziert, daß $\kappa \circ \gamma_\varrho$ die gewünschten Eigenschaften besitzt und zu γ_ϱ homotop rel der Endpunkte ist.

Das Ziel ist erreicht, wenn κ die Kreisscheibe $\overline{K_s(z_\varrho)}$ auf $\overline{K_a(z_\varrho)}$ und den Kreisring $K_{2a}(z_\varrho) - K_s(z_\varrho)$ auf $K_{2a}(z_\varrho) - K_a(z_\varrho)$ abbildet, wobei κ auf $\partial K_{2a}(z_\varrho)$ und außerhalb die Identität sein soll.

Um Formelliebhaber zufriedenzustellen:

$$\kappa : z \mapsto \begin{cases} z_\varrho + \frac{a}{s}(z - z_\varrho) & \text{für } 0 \leq |z - z_\varrho| \leq s \\ z_\varrho + \left(\frac{a}{2a-s}\,|z - z_\varrho| + 2a\left(1 - \frac{a}{2a-s}\right)\right)\frac{z-z_\varrho}{|z-z_\varrho|} & \text{für } s < |z - z_\varrho| < 2a \\ z & \text{für } |z - z_\varrho| \geq 2a \end{cases}$$

□

Nach diesen Vorarbeiten ist der folgende Satz nicht mehr schwer zu beweisen: Betrachtet wird die Exponentialfunktion $E_\lambda(z)$ mit einem PSP-Parameter λ. In Lemma 3.4 wurde gezeigt, daß sich die Exponentialfunktion in einem bestimmten Kompaktum durch ein Polynom approximieren läßt, dessen kritischer Orbit die gleiche Vorperiode und Periode hat. Für dieses Polynom existiert eine Fixspinne. Verlängert man diese Spinne von den Endpunkten, also den Punkten des kritischen Orbits des Polynoms, bis zu den zugehörigen Punkten des singulären Orbits von E_λ, so läßt sich zeigen, daß die so konstruierte Spinne äquivalent zu ihrem Bild unter der Exponentialabbildung ist. Damit ist eine neue Spinnenart entdeckt: die Exponentialfixspinne *(Araneida exponentialis invarians)*.

(3.7) Satz. (Exponentialfixspinne im postsingulär endlichen Fall)
Ist der singuläre Wert 0 *unter Iteration durch die Funktion* E_λ *echt vorperiodisch, dann existiert eine Spinne* ϕ*, deren Beine am singulären Orbit landen und deren Bild unter der von* E_λ *induzierten Spinnenabbildung homotop zu* ϕ *rel der Endpunkte ist.*

Beweis: Die Menge, die aus dem singulären Orbit mit Ausnahme des singulären Wertes besteht, wird für die Dauer dieses Beweises mit $\mathcal{O}$ bezeichnet; es gilt also $\mathcal{O} := \{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$.

(i) In diesem Schritt wählen wir die Kompakta K und K', auf dem E_λ bzw. Zweige von E_λ^{-1} durch ein Polynom genähert werden sollen.

Sei $3a$ der minimale Abstand zweier Punkte auf dem singulären Orbit. Dann kann man K folgendermaßen wählen: K soll einfach zusammenhängend sein und um jeden Punkt des singulären Orbits eine Kreisscheibe mit Radius $2a$ enthalten. Das Kompaktum K' entsteht, indem man aus K die (offene) Kreisscheibe mit Radius a um den singulären Wert entfernt.

(ii) Als nächstes wird die Approximationsgüte bestimmt.

Dazu betrachten wir eine Kreisscheibe mit Radius a um einen Punkt $z_\varrho \in \mathcal{O}$. Ein Zweig von E_λ^{-1} bildet diese Kreisscheibe auf eine Umgebung des Punktes $z_{\varrho-1}$ ab. In dieser Umgebung wählen wir eine Kreisscheibe um den Punkt $z_{\varrho-1}$ und bezeichnen den Radius mit $2b_{\varrho-1}$. Dieses Verfahren wird für alle Punkte des singulären Orbits mit Ausnahme des singulären Wertes durchgeführt; für z_l ist diese Prozedur zweimal anzuwenden, da dieser Punkt zwei Urbilder auf dem singulären Orbit hat, nämlich z_{l-1} und z_{n-1}. Sei $b := \min\{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$.

Das Ergebnis dieses Schrittes ist: Eine Kreisscheibe mit Radius $2b$ um einen Punkt des singulären Orbits wird von E_λ in eine Kreisscheibe mit Radius a um den

Bildpunkt auf dem singulären Orbit abgebildet.

(iii) Jetzt können wir das approximierende Polynom $P_{\tilde{\lambda},d}$ bestimmen:

Nach Lemma 3.4 existiert ein Polynom $P_{\tilde{\lambda},d}$ vom Grad d mit Vorperiode l und Periode k, das E_λ innerhalb des Kompaktums K und Zweige von E_λ^{-1} innerhalb K' auf $b/3$ genau approximiert. Der Grad des Polynoms kann so gewählt werden, daß zusätzlich noch die Bedingung $\left|P'_{\tilde{\lambda},d}(z_{\varrho-1})\right| < 2\,|E'_\lambda(z_{\varrho-1})|$ für alle $\varrho = 1,\dots,n$ erfüllt ist. Dann gilt, daß die Kreisscheibe mit Radius b um einen Punkt $z_{\varrho-1}$ des singulären Orbits von $P_{\tilde{\lambda},d}$ in die Kreisscheibe mit Radius a um den Punkt z_ϱ abgebildet wird: Aus dem Koebeschen $1/4$–Satz folgt, daß für schlichte Funktionen auf einem Gebiet D und $\zeta \in D$ gilt

$$\operatorname{dist}\Big(f(\zeta), \partial\big(f(D)\big)\Big) \le 4\,|f'(\zeta)|\,\operatorname{dist}(\zeta, \partial D).$$

Wählen wir als Gebiet D die Kreisscheibe mit Radius $2b$ um $z_{\varrho-1}$, so gilt also

$$\operatorname{dist}\Big(E_\lambda(z_\varrho), \partial\big(E_\lambda(D)\big)\Big) \le 4\,|E'_\lambda(z_{\varrho-1})|\operatorname{dist}(z_{\varrho-1}, \partial D) = 8b\,|E'_\lambda(z_{\varrho-1})| < a.$$

(genau hier geht der letzte Schritt ein).

Für das Bild der Kreisscheibe mit Radius b unter $P_{\tilde{\lambda},d}$ gilt dann

$$\operatorname{dist}\Big(P_{\tilde{\lambda},d}(z_\varrho), \partial\big(P_{\tilde{\lambda},d}(D)\big)\Big) \le 4\left|P'_{\tilde{\lambda},d}(z_{\varrho-1})\right|\operatorname{dist}(z_{\varrho-1}, \partial D) \le 8b\,|E'_\lambda(z_{\varrho-1})| < a.$$

Insbesondere folgt, daß die Bilder von Kreisscheiben mit Radius b um je zwei verschiedene Punkte des singulären Orbits sich unter $P_{\tilde{\lambda},d}$ nicht schneiden.

(iv) Der erste Schritt, um die Exponentialfixspinne zu konstruieren: Wir nehmen die Polynomfixspinne für $P_{\tilde{\lambda},d}$ und verbiegen sie in geeigneter Weise (d.h.: wir wählen eine zur Polynomfixspinne äquivalente Spinne, die die Kreisscheiben vermeidet). Konkret sieht das so aus:

Für $P_{\tilde{\lambda},d}$ existiert nach Lemma 3.5 eine Fixspinne, die wir mit $\phi_{\tilde{\lambda},d}$ bezeichnen (Merkregel: Spinnen sind Kleinϕ).

Wir verformen diese Spinne wie folgt (ohne die Homotopieklasse zu ändern): Da die Punkte des singulären Orbits voneinander mindestens den Abstand $3a$ haben, existiert nach Lemma 3.6 eine zu $\phi_{\tilde{\lambda},d}$ äquivalente Spinne, so daß kein Bein dieser Spinne eine Kreisscheibe mit Radius a um einen dieser Punkte trifft (ausgenommen natürlich die Kreisscheibe, die den Endpunkt dieses Beines enthält).

(v) Die Polynomspinnenabbildung wird auf kanonische Weise definiert:

Definiert man für die Endpunkte $z_\varrho^P := P_{\tilde{\lambda},d}^{\circ\varrho}(0)$ das Urbild $P_{\tilde{\lambda},d}^{-1}$ als $z_{\varrho-1}$ für $\varrho = 1,\dots,n-1$, so läßt sich durch analytische Fortsetzung $P_{\tilde{\lambda},d}^{-1}$ in einer Umgebung jedes Beines definieren, das nicht am kritischen Wert landet. Die Abbildung, die jedem Bein so ein Bildbein zuordnet, induziert die Polynomspinnenabbildung.

(vi) Jetzt sind alle Schwierigkeiten aus dem Weg geräumt:

- Da die durch „Verbiegen“ erhaltene Spinne äquivalent ist zur Spinne aus Polynomstrahlen, ist für $\varrho = 1,\dots,n-1$ das Bild $\tilde{\gamma}_\varrho$ eines Beines unter der Polynomspinnenabbildung homotop zu dem Bein $\gamma_{\varrho-1}$ rel der Polynomendpunkte.

- Daraus folgt, daß dieses Bein $\tilde{\gamma}_\varrho$ auch homotop zu $\gamma_{\varrho-1}$ ist rel aller Punkte des singulären Orbits von E_λ, eventuell mit Ausnahme des Punktes $E_\lambda^{\circ\varrho-1}(0)$: Angenommen, diese Behauptung ist falsch. Die Kurven $\tilde{\gamma}_\varrho$ und $\gamma_{\varrho-1}$ bilden eine Jordankurve, also existiert nach dem Jordanschen Kurvensatz ein Inneres J. Angenommen, J enthält einen Punkt des singulären Orbits. Entweder handelt es sich um $E_\lambda^{\circ\varrho-1}(0)$, dann ist nichts weiter zu zeigen. Handelt es sich jedoch um einen anderen Punkt des singulären Orbits, so enthält das Innere J auch die Kreisscheibe mit Radius b um diesen Punkt (da $\tilde{\gamma}_{\varrho-1}$ und $\gamma_{\varrho-1}$ konstruktionsgemäß nur die Kreisscheibe um $E_\lambda^{\circ\varrho-1}(0)$ schneiden). Da jede solche Kreisscheibe aber einen Punkt des kritischen Orbits enthält, widerspricht das der gerade gezeigten Homotopie von $\tilde{\gamma}_\varrho$ und $\gamma_{\varrho-1}$ rel der Punkte des kritischen Orbits.

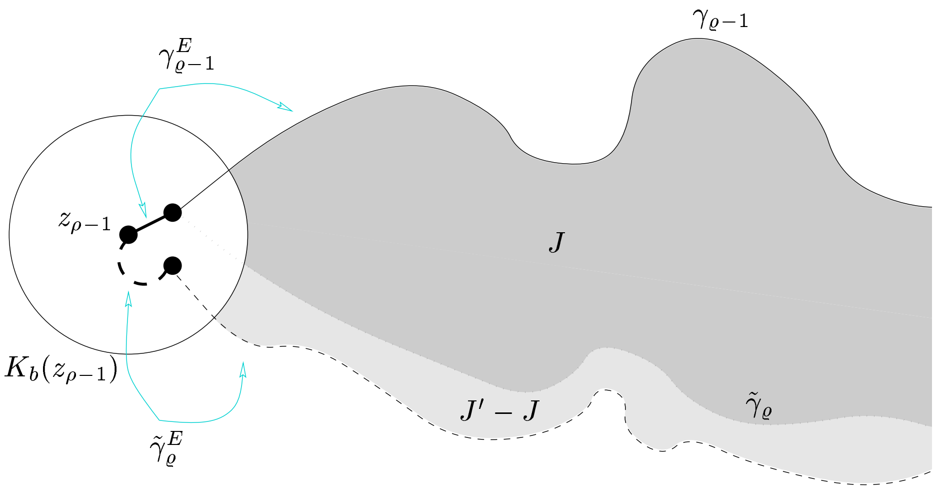
(vii) Jetzt vervollständigen wir die Konstruktion der Exponentialspinne:

Verbindet man jeden Punkt des kritischen Orbits von $P_{\tilde{\lambda},d}$ mit dem zugehörigen Punkt des singulären Orbits von E_λ, so entsteht eine neue Spinne: die Exponentialspinne ϕ_λ, deren Beine mit $\gamma_\varrho^E, \varrho = 0, \ldots, n-1$, bezeichnet werden (Das Polynombein, das am singulären Wert landet, muß nicht verlängert werden, da der singuläre Wert von $P_{\tilde{\lambda},d}$ ja mit dem singulären Wert von E_λ übereinstimmt).

(viii) In diesem Schritt wird gezeigt, daß das Bild eines Beines unter der Exponentialspinnenabbildung homotop zu dem entsprechenden Bein der Exponentialspinne rel der Punkte des singulären Orbits ist.

Betrachten wir ein festes Bein γ_ϱ^E dieser Exponentialspinne, das nicht am singulären Wert landet: Dieses Bein ist also ein Polynombein γ_ϱ, verlängert um ein Geradenstück mit einer Länge kleiner als $b/3$. Das Bild des Beines γ_ϱ^E unter der Exponentialspinnenabbildung wird wieder mit $\tilde{\gamma}_\varrho^E$ bezeichnet. Wir wollen zeigen, daß $\tilde{\gamma}_\varrho^E$ homotop zu $\gamma_{\varrho-1}^E$ rel der Punkte des singulären Orbits ist. Diese beiden Kurven bilden eine Jordankurve; zu zeigen ist, daß das Innere J' dieser Jordankurve keinen singulären Punkt enthält.

Vielleicht hilft eine Skizze, die Situation klarzumachen:



Jetzt benützen wir, daß das Polynombein $\gamma_{\varrho-1}$ homotop zu dem Bild von γ_ϱ unter der Polynomspinnenabbildung rel der Punkte des singulären Orbits ohne $E_\lambda^{\circ\varrho-1}(0)$ ist: Also enthält das Innere J der Jordankurve aus $\gamma_{\varrho-1}$ und $\tilde{\gamma}_\varrho$ keinen Punkt des singulären Orbits, eventuell mit Ausnahme von $E_\lambda^{\circ\varrho-1}(0)$ — diesen Punkt können wir aber von der weiteren Überlegung ausschließen: Wir wissen, daß er nicht im Inneren J' liegen kann, da er auf der zugehörigen Jordankurve und damit auf dem Rand von J' liegt. Deshalb betrachten wir die Menge $J'-J$: Da in J kein Punkt des singulären Orbits (ohne Berücksichtigung des uninteressanten Punkts $E_\lambda^{\circ\varrho-1}(0)$) liegt, kann J' nur dann einen von $E_\lambda^{\circ\varrho-1}(0)$ verschiedenen Punkt des singulären Orbits enthalten, wenn dieser in $J'-J$ liegt.

In der Kreisscheibe mit Radius b um den Endpunkt $z_{\varrho-1}$ ist kein anderer Punkt des singulären Orbits enthalten. Jeder Randpunkt außerhalb dieser Kreisscheibe ist aber entweder ein Punkt des Bildes von γ_ϱ^E unter der Polynomspinnenabbildung oder ein Bildpunkt von γ_ϱ^E unter der Exponentialspinnenabbildung. Nach Konstruktion approximiert die Polynomspinnenabbildung die Exponentialspinnenabbildung bis auf $b/3$ genau; würde ein Punkt des singulären Orbits dazwischenliegen, so würden die beiden Spinnenabbildungen γ_ϱ^E in die Kreisscheibe mit Radius b um diesen Punkt abbilden, ein Widerspruch.

(ix) Die bisherige Überlegung trifft für die Beine γ_ϱ^E für $\varrho = 1, \ldots, n-1$ zu, nicht jedoch für das Bein, das am singulären Wert landen soll. Doch da γ_1^E homotop rel der Endpunkte zu $\tilde{\gamma}_1^E$ ist, sind natürlich auch die Urbilder unter E_λ^{-1}, also $\tilde{\gamma}_0^E$ und $\tilde{\gamma}_0^E$, zueinander homotop rel der Endpunkte.

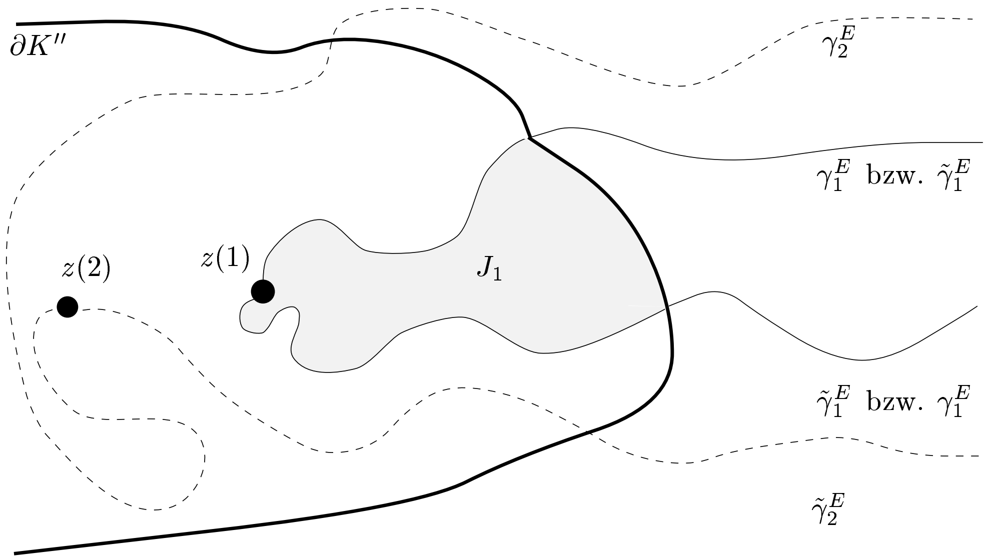
(x) Insgesamt ergibt sich also, daß jedes Bein homotop zu seinem Bildbein unter der Spinnenabbildung rel der Endpunkte ist. Also ist $\phi_\lambda(\phi^E) =: \tilde{\phi}^E$ homotop zu ϕ^E rel der Endpunkte.

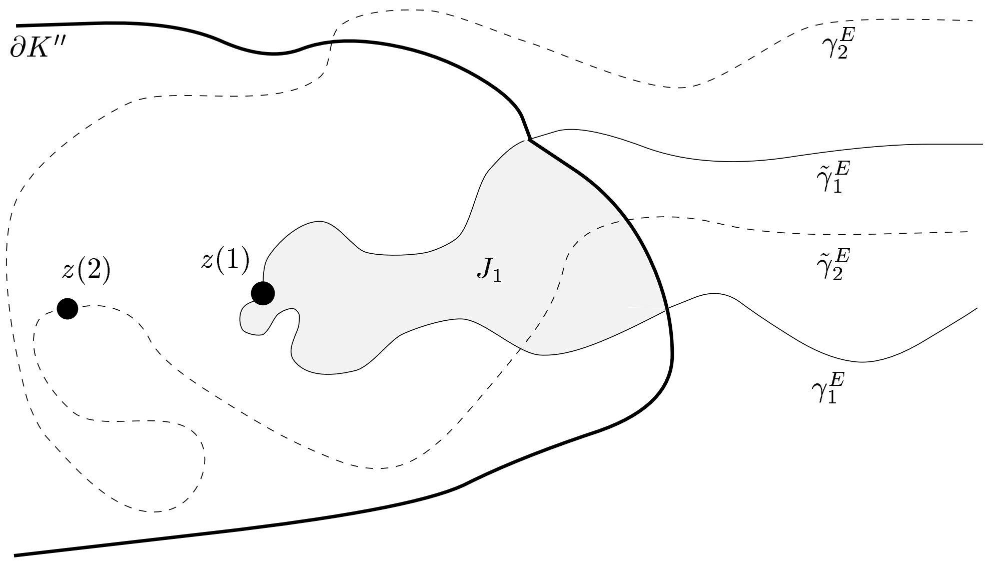
(xi) Schließlich wird noch gezeigt, daß die Anordnung der Beine nahe Unendlich unter der Spinnenabbildung invariant bleibt:

Da für $\sigma = 0, \ldots, n-1$ definitionsgemäß $\mathrm{Re}\big(\gamma_\sigma^E(t)\big) \to +\infty$ und $\mathrm{Re}\big(\tilde{\gamma}_\sigma^E(t)\big) \to +\infty$ für $t \to +\infty$ gilt, existiert ein K umfassendes Kompaktum K'' mit glattem Rand, so daß für $\sigma = 0, \ldots, n-1$ die Beine γ_σ^E und $\tilde{\gamma}_\sigma^E$ den Rand von K'' nur einmal schneiden. Für die Beine läßt sich auf $\partial K''$ eine Ordnung einführen: Für jedes Bein γ_σ^E betrachtet man den Parameter $t_\sigma \in [0, +\infty]$, für den $\gamma_\sigma^E(t_\sigma) \in \partial K$ gilt. Die so erhaltenen Punkte $\gamma_\sigma^E(t_\sigma)$ kann man anhand der Ordnung der Beine nahe Unendlich sortieren. Sei etwa $\gamma_1^E < \gamma_2^E$. Nun bilden $\tilde{\gamma}_1^E|_{K''}, \gamma_1^E|_{K''}$ und das Segment von $\partial K''$ zwischen $\tilde{\gamma}_1^E$ und γ_1^E eine Jordankurve C_1, also existiert nach dem Jordanschen Kurvensatz ein Inneres J_1; und dieses Innere kann keinen Endpunkt z_ϱ mit $\varrho \in \{0, \ldots, n-1\}$ enthalten — sonst wären $\tilde{\gamma}_1^E$ und γ_1^E ja nicht homotop zueinander rel der Endpunkte. Insbesondere enthält das Innere der Jordankurve C_1 den Endpunkt von γ_2^E nicht. Also muß dieser Endpunkt im Äußeren von C_1 liegen. Deshalb ist $\tilde{\gamma}_2^E$ äquivalent zu einer Kurve, die C_1 nie schneidet.

Nehmen wir $\tilde{\gamma}_1^E > \tilde{\gamma}_2^E$ an (diese Annahme soll zum Widerspruch geführt werden), so läßt sich für $\tilde{\gamma}_2^E$ ähnlich argumentieren: Das Bein $\tilde{\gamma}_2^E$ ist äquivalent zu einem Bein, das C_1 überhaupt nicht oder nur einmal (und dann in γ_1^E) schneidet.

Im folgenden sind diese beiden Möglichkeiten skizziert:





Konstruiert man für die so erhaltenen Kurven (die zu γ_2^E bzw. $\tilde{\gamma}_2^E$ homotop rel der Punkte des singulären Orbits sind) und dem dazwischenliegenden Segment von $\partial K''$ eine Jordankurve C_2, so enthält diese Kurve zumindest Teile der zuerst konstruierten Jordankurve C_1 im Inneren, insbesondere aber den Endpunkt z_1. Das widerspricht der Homotopie von γ_2^E und $\tilde{\gamma}_2^E$. Also war die Annahme $\tilde{\gamma}_1^E > \tilde{\gamma}_2^E$ falsch, und daraus ergibt sich, daß $\tilde{\gamma}_1^E$ und $\tilde{\gamma}_2^E$ die gleiche Anordnung nahe Unendlich haben wie γ_1^E und γ_2^E. □

Bemerkung. In dieser Konstruktion steckt noch eine mögliche Mehrdeutigkeit, da für ein Polynom $P_{\tilde{\lambda},d}$ mehrere Strahlen existieren können, die am kritischen Wert landen.

§4. Dynamische Strahlen nahe Unendlich

Thema dieses Abschnitts sind dynamische Strahlen: Zunächst werden „Devaney–Strahlen“ eingeführt; grob gesagt sind das Enden von dynamischen Strahlen nahe ∞. Wir beweisen die Existenz von Devaney–Strahlen unter bestimmten kombinatorischen Voraussetzungen. Anschließend werden aus den Devaney–Strahlen dynamische Strahlen konstruiert.

§4.1 Eine Partition der dynamischen Ebene

Bevor wir dynamische Strahlen definieren können, müssen noch einige Begriffe eingeführt werden.

Im folgenden sei immer $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_0^- =: \mathbb{C}'$. Zur Normierung setzen wir fest, daß für jedes $\lambda \in \mathbb{C}'$ $\operatorname{Arg}\lambda$ im Intervall $(-\pi, \pi)$ liegt.

Eine Kollektion abzählbar vieler paarweise disjunkter offener Mengen wird ***Partition*** von $\mathbb{C}$ genannt, wenn die Vereinigung der Abschlüsse die ganze komplexe Ebene ist; eine einzelne solche Menge heißt ***Sektor*** und eine Zusammenhangskomponente des Randes der Menge aller Sektoren wird als ***Partitionsgrenze*** bezeichnet.

Unter einer ***Markovpartition*** versteht man eine Partition, deren Partitionsgrenzen unter der Dynamik vorwärtsinvariant sind. Insbesondere gilt dann, daß die Vorwärtsbilder der Partitionsgrenzen keinen Sektor der Partition schneiden. — Das Ziel, eine Markovpartition für E_λ zu konstruieren, werden wir nicht ganz erreichen; aber die folgende Partition ist für unsere Zwecke gut genug (und „fast“ eine Markovpartition für E_λ):

Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir die horizontalen Streifen $R(k)$ durch

$$R(k) := R_\lambda(k) := \{z \in \mathbb{C} \mid (2k-1)\pi - \operatorname{Arg}\lambda < \operatorname{Im}(z) < (2k+1)\pi - \operatorname{Arg}\lambda\}.$$

Die Partitionsgrenzen sind also die Urbilder der negativen reellen Achse; damit bildet E_λ jeden Sektor eineindeutig auf die längs der negativen reellen Achse geschlitzte komplexe Ebene $\mathbb{C}'$ ab. Die Umkehrfunktion von E_λ, deren Bild im Sektor $R(k)$ liegt, wird mit $L_{\lambda,k}$ bezeichnet. Ist Log der Hauptzweig des Logarithmus auf $\mathbb{C}'$, so gilt also $L_{\lambda,k}(z) = -\operatorname{Log}\lambda + \operatorname{Log} z + 2\pi i k$. Damit gilt $R(k) \subseteq E_\lambda\big(R(k)\big)$ für jedes $k \neq 0$, also schneiden die Vorwärtsbilder der Partitionsgrenzen nur einen Sektor, nämlich für jedes $\lambda \in \mathbb{C}'$ den Sektor $R(0)$ (deshalb „fast“ Markovpartition).

Die Idee, die Urbilder der negativen reellen Achse als Partitionsgrenzen zu verwenden, findet sich in [DGH86]. Im folgenden wird diese Partition als ***Devaneypartition*** bezeichnet.

(4.1) Definition. (Devaney–Itinerary)
Gilt für $z \in \mathbb{C}$, daß der Orbit von z unter E_λ die Partitionsgrenzen niemals trifft,

d.h. $E_\lambda^{\circ n}(z) \notin \mathbb{R}^-$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*, so ist die* ***Devaney–Itinerary*** *von* z *die Folge der Sektornummern, in denen* $z, E_\lambda(z), E_\lambda^{\circ 2}(z), \ldots$ *liegt.*

Die Devaney–Itinerary eines Punktes ist also undefiniert, sobald ein Vorwärtsiteriertes dieses Punktes auf einer Partitionsgrenze liegt.

(4.2) Definition. (Formale Itinerary)
Eine Folge $s := s_0 s_1 s_2 \ldots \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *wird* ***formale Itinerary*** *genannt. Existiert ein* $M \in \mathbb{N}$*, so daß* $|s_j| \leq M$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$ *gilt, so ist die formale Itinerary* ***beschränkt****.*

Damit stellt sich unmittelbar die Frage, ob zu einer gegebenen formalen Itinerary s (mindestens) ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ existiert, dessen Devaney–Itinerary $S(z)$ mit s übereinstimmt. Es wird sich zeigen, daß für eine beschränkte formale Itinerary sogar eine Kurve existiert, deren Punkte alle diese Itinerary haben. Also: Jede beschränkte formale Itinerary wird auch realisiert. Das ist eine Verallgemeinerung eines Resultats von [DGH86]. Dort wird bewiesen, daß jede beschränkte formale Itinerary, deren Einträge alle von Null verschieden sind, auch Devaney–Itinerary von Punkten der komplexen Ebene ist. Beschränkte formale Itineraries mit $s_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ werden in [DGH86] als ***reguläre Itineraries*** bezeichnet. Die vorliegende Arbeit versucht, die sehr restriktive Beschränkung auf reguläre Itineraries aufzuheben. Es wird sich zeigen, daß gerade die Fälle interessant sind, in denen die formale Itinerary nicht regulär ist. — Für unbeschränkte formale Itineraries (die aber einer gewissen Wachstumsbedingung unterliegen) siehe [DK84].

Eine wichtige Abbildung des Raums aller formalen Itineraries in sich ist die Shiftabbildung σ:

(4.3) Definition. (Shiftabbildung)
Die Abbildung σ*, die jeder formalen Itinerary* $s := s_0 s_1 s_2 \ldots$ *die formale Itinerary* $\sigma(s) := s_1 s_2 s_3 \ldots \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *zuordnet, heißt* ***Shiftabbildung*** *oder kurz* ***Shift****.*

So einfach die Shiftabbildung auch definiert ist, sie spielt doch eine zentrale Rolle. In [DGH86] wird beispielsweise gezeigt, daß die Shiftabbildung auf der Menge der regulären Itineraries konjugiert zu E_λ auf einer speziellen Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist (mit $\lambda \in \mathbb{C}'$).

§4.2 Devaney–Strahlen

Nun stehen alle notwendigen Begriffe zur Verfügung, um Devaney–Strahlen definieren zu können.

(4.4) Definition. (Devaney–Strahl)
Sei s *eine formale Itinerary. Existiert eine Kurve*

$$g_{\lambda,s}\colon [1,\infty) \to \mathbb{C}\,,$$

so daß jeder Kurvenpunkt die Devaney–Itinerary s *unter* E_λ *besitzt und weiter* $\mathrm{Re}\big(E_\lambda^{\circ n}(g_{\lambda,s}(t)\big)\big) \to +\infty$ *für* $n \to \infty$ *und für jedes* $t > 1$ *gilt und schließlich*

$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Re}\big(g_{\lambda,s}(t)\big) = +\infty$ *erfüllt ist, so bezeichnet man diese Kurve als* ***Devaney–Strahl*** *von* E_λ.

Grob gesagt handelt es sich also um Kurven, deren Punkte jeweils die vorgegebene formale Itinerary s haben und in der Juliamenge von E_λ liegen (letzteres folgt aus $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Re}\big(g_{\lambda,s}(t)\big) = +\infty$).

BEMERKUNG. In [DGH86] werden ähnliche Objekte, sogenannte „Haare", definiert und untersucht. Haare entsprechen im wesentlichen unseren Devaney–Strahlen; jedoch wird noch zusätzlich verlangt, daß Haare an einem Punkt landen. Unsere Definition entspricht eher der Definition von dynamischen Strahlen eines Polynoms: Auch dort wird nicht verlangt, daß ein dynamischer Strahl landet.

Wir wollen so vorgehen: Zunächst wird nur untersucht, ob für jede beschränkte formale Itinerary ein Strahl hinreichend weit rechts in der komplexen Ebene existiert. Dabei wird die Frage ausgeklammert, ob dieser Strahl landet oder nicht (dies spiegelt sich in der obigen Definition wieder). Es wird sich zeigen, daß ein solches Strahlenende tatsächlich für jede beschränkte formale Itinerary existiert. Danach wird bewiesen, daß sich im postsingulär endlichen Fall jedes so konstruierte Strahlenende zurücktransportieren läßt, bis es an einem Punkt landet. Dieses Ergebnis verallgemeinert dann ein Resultat von [DGH86]: Dort wird die Existenz von regulären Haaren (also regulären Strahlen, die an einem Punkt landen) bewiesen.

Der nächste Satz (und erst recht der Beweis!) sieht nicht sehr einladend aus; er ist aber ein Kernstück der Arbeit. Die hier untersuchte Funktion G_s stellt eine Parametrisierung eines Devaney–Strahls s dar. Die Beweisidee ist, die in diesem Satz definierten Funktionen $G_s^n(t)$ in Taylorreihen zu entwickeln und deren Konvergenz zu untersuchen. Dabei enthalten die im Beweis definierten Funktionen $g_s^n(t)$ die Terme erster Ordnung der Reihenentwicklung des Logarithmus, während die Restterme in $r_s^n(t)$ enthalten sind.

(4.5) SATZ.
Sei $\lambda \in \mathbb{C}'$ *fest gewählt und* $s := (s_0, s_1, \dots)$ *eine beschränkte formale Itinerary. Dann existiert ein* $t_1 > 1$, *so daß für* $t \geq t_1$ *die Folge der Funktionen*

$$G_s^n(t) := L_{\lambda,s_0} \circ \ldots \circ L_{\lambda,s_{n-1}} \circ E^{\circ n}(t)$$

existiert und absolut und gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $G_s(t)$ *konvergiert. Diese Funktion ist stetig, hängt für festes* $t \geq t_1$ *analytisch vom Parameter* λ *ab und erfüllt die Funktionalgleichung* $G_{\sigma(s)}(e^t) = E_\lambda G_s(t)$. *Außerdem gilt* $G_s(t) = t - \mathrm{Log}\lambda + 2\pi i s_0 + O(e^{-t})$, *dabei hängt* $O(e^{-t})$ *nur von der Schranke für die formale Itinerary* s *und von* λ *ab. D.h. für beschränkte formale Itineraries mit gleicher Schranke kann das gleiche* $O(e^{-t})$ *gewählt werden. Es existiert eine Konstante* L^*, *so daß für alle* $n \in \mathbb{N}^*$ *und alle* $t \geq t_1$ *die Ungleichung* $|G_s^n(t) - t| \leq L^*$ *erfüllt ist.*

BEMERKUNG. Die Beschränkung auf Parameter $\lambda \in \mathbb{C}'$ dient im wesentlichen nur dazu, die Notation im Beweis einfach zu halten.

Beweis: Der Beweis wird in mehrere Schritte untergliedert.

(i) Um die Übersicht (so weit wie möglich!) zu wahren, setzen wir

$$g_s^n(t) := -\mathrm{Log}\lambda \sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{E^{\circ l}(t)} + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{E^{\circ l}(t)} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$r_s^1(t) := 0,$$

$$r_s^{n+1}(t) := \mathrm{Log}\left(1 + \frac{g_{\sigma(s)}^n(e^t) + r_{\sigma(s)}^n(e^t)}{e^t}\right) - \frac{g_{\sigma(s)}^n(e^t)}{e^t} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Wir zeigen später, daß $r_s^n(t)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $t \geq t_1$ existiert. Zunächst wenden wir uns der Funktionenfolge $g_s^n(t)$ zu.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $g_s^n(t)$ wohldefiniert. Wir zeigen zunächst, daß für $n \in \mathbb{N}^*$ die Rekursionsgleichung

$$g_s^{n+1}(t) = -\mathrm{Log}\lambda + 2\pi i s_0 + g_{\sigma(s)}^n(e^t)/e^t$$

gilt:

$$\begin{aligned}
g_s^{n+1}(t) &= -\mathrm{Log}\lambda \sum_{k=1}^{n+1} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{E^{\circ l}(t)} + 2\pi i \sum_{k=1}^{n+1} s_{k-1} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{E^{\circ l}(t)} \\
&= -\mathrm{Log}\lambda - \mathrm{Log}\lambda \sum_{k=2}^{n+1} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{E^{\circ l}(t)} + 2\pi i s_0 + 2\pi i \sum_{k=2}^{n+1} s_{k-1} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{E^{\circ l}(t)} \\
&= -\mathrm{Log}\lambda + 2\pi i s_0 - \mathrm{Log}\lambda \sum_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{E^{\circ l}(t)} + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} s_k \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{E^{\circ l}(t)} \\
&= -\mathrm{Log}\lambda + 2\pi i s_0 - \mathrm{Log}\lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e(t)} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{E^{\circ l}(e^t)} + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{e(t)} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{E^{\circ l}(e^t)} \\
&= -\mathrm{Log}\lambda + 2\pi s_0 + g_{\sigma(s)}^n(e^t)/e^t.
\end{aligned}$$

(iii) In diesem Schritt wird gezeigt, daß $g_s^n(t)$ absolut und gleichmäßig konvergiert und die Grenzfunktion $g_s(t)$ analytisch von λ abhängt. Sei $\lambda \in \mathbb{C}'$. Dann kann eine Umgebung $U(\lambda)$ von λ so gewählt werden, daß ein $K \in \mathbb{R}$ existiert, so daß für alle $\tilde{\lambda} \in U(\lambda)$ gilt $\left|\mathrm{Log}\tilde{\lambda}\right| \leq K$. Sei weiter $M^* := \sup\{|s_0|, |s_1|, \ldots\} < \infty$ und $M := K + 2\pi M^*$. Ist $\varepsilon > 0$ und $t_g > 1$ fest gewählt, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß gilt

$$\sum_{k \geq n_0} \frac{1}{t_g^{k-1}} \leq \varepsilon.$$

Dann gilt für $t \geq t_g$ und $m > n > n_0$

$$\begin{aligned}
|g_s^m(t) - g_s^n(t)| &\leq (|\mathrm{Log}\lambda| + 2\pi M^*) \sum_{k=n+1}^{m} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{E^{\circ l}(t)} \leq M \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{t^{k-1}} \\
&\leq M \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{t^{k-1}} \leq M \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{t_g^{k-1}} \leq \varepsilon;
\end{aligned}$$

für $t \geq t_g$ konvergiert $g_s^n(t)$ für $n \to +\infty$ also absolut und gleichmäßig. Da für $\lambda \in \mathbb{C}'$ eine Umgebung $U(\lambda)$ existiert, so daß g_s^n in dieser Umgebung gleichmäßig konvergiert, ist g_s^n als Funktion von λ betrachtet lokal gleichmäßig konvergent und damit kompakt konvergent; nach dem Satz von Weierstraß hängt die Grenzfunktion analytisch von λ ab, da alle g_s^n analytisch in λ sind.

(iv) Behauptung: Es existiert ein $t_\alpha > 1$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und alle $t \geq t_\alpha$ gilt $|g_s^n(t)| \leq M$.

Beweis: Wählt man t_α so, daß $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_\alpha^{k-1}} \leq 1$ gilt, so folgt

$$|g_s^n(t)| \leq M \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t^{k-1}} \leq M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_\alpha^{k-1}} \leq M.$$

(v) Behauptung: Es existiert ein $t_\beta \geq \min\{\ln(4M), t_\alpha\}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und alle $t \geq t_\beta$ die Funktion $r_s^n(t)$ wohldefiniert ist und es gilt

$$|r_s^n(t)| \leq M.$$

Für den Beweis: Ist

$$L := \sup \left| \frac{d}{dx} |\ln(1-x)| \right| \quad \text{für } x \in [0, 1/2],$$

so kann gegebenenfalls durch Vergrößern von t_β erreicht werden, daß gilt

$$\frac{2ML + M}{e^{t_\beta}} \leq M.$$

Beweis der Behauptung: Durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Es gilt $0 = \left|r_s^1(t)\right| \leq M$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$, erst recht also für alle $t \geq t_\beta$.

Induktionsschritt: Zunächst folgt aus der Induktionsannahme $r_s^n(\tilde{t}) \leq M$ für alle $\tilde{t} \geq t_\beta$ die Wohldefiniertheit von $r_s^{n+1}(t)$ mit $t \geq t_\beta$:

$$\left| \frac{g_{\sigma(s)}^n(e^t) + r_{\sigma(s)}^n(e^t)}{e^t} \right| \leq \frac{2M}{e^t} \leq \frac{2M}{e^{t_\beta}} < 1.$$

Also gilt

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{g_{\sigma(s)}^n(e^t) + r_{\sigma(s)}^n(e^t)}{e^t}\right) > 0.$$

Jetzt zur Beschränktheit: Wir benützen, daß für $|z| \leq \alpha$ gilt

$$|\operatorname{Log}(1+z)| \leq |\ln(1-\alpha)|.$$

Denn dann folgt

$$\begin{aligned}\left|r_s^{n+1}(t)\right| &\leq \left|\operatorname{Log}\left(1 + \frac{g_{\sigma(s)}^n(e^t) + r_{\sigma(s)}^n(e^t)}{e^t}\right)\right| + \left|\frac{g_{\sigma(s)}^n(e^t)}{e^t}\right| \\ &\leq \left|\ln\left(1 - \frac{2M}{e^t}\right)\right| + \frac{M}{e^t};\end{aligned}$$

Aus der Definition von L folgt für $x \in [0,1/2]$ die Abschätzung

$$|\ln(1-x)| = \big||\ln(1-x)| - |\ln(1-0)|\big| \leq L\,|x-0| \leq Lx.$$

Daher gilt

$$\left|r_s^{n+1}(t)\right| \leq \frac{2ML+M}{e^t} \leq \frac{2ML+M}{e^{t_\beta}} \leq M.$$

(vi) Aus der letzten Ungleichung

$$\left|r_s^{n+1}(t)\right| \leq \frac{2ML+M}{e^t}$$

ergibt sich $r_s^{n+1}(t) \in O(e^{-t})$ für $t \to +\infty$, wobei $O(e^{-t})$ nur von M abhängt.

(vii) Jetzt können wir die Konvergenz von $r_s^n(t)$ untersuchen: Dazu benutzen wir, daß mit

$$C := \sup \left| \frac{d}{dz} |\mathrm{Log}(1+z)| \right| \quad \text{für } z \in \overline{D_{1/2}(1)}$$

für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a|, |b| \leq 1/2$ gilt

$$|\mathrm{Log}(1+a) - \mathrm{Log}(1+b)| \leq C\,|a-b|\,.$$

Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so existiert ein $t_r \geq t_\beta$ mit

$$\frac{3M(C+1)}{C} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{C}{t_r}\right)^j \leq \varepsilon.$$

Dann folgt für $t \geq t_r$

$$\begin{aligned}
|r_s^m(t) - r_s^n(t)| \leq & \left| \mathrm{Log}\left(1 + \frac{g_{\sigma(s)}^m(e^t) + r_{\sigma(s)}^{m-1}(e^t)}{e^t}\right)\right. \\
& \left. - \mathrm{Log}\left(1 + \frac{g_{\sigma(s)}^{n-1}(e^t) + r_{\sigma(s)}^{n-1}(e^t)}{e^t}\right)\right| + \left|\frac{g_{\sigma(s)}^{m-1}(e^t) - g_{\sigma(s)}^{n-1}(e^t)}{e^t}\right| \\
\leq & \frac{C}{t}\left(\left|g_{\sigma(s)}^{m-1}(e^t) - g_{\sigma(s)}^{n-1}(e^t)\right| + \left|r_{\sigma(s)}^{m-1}(e^t) - r_{\sigma(s)}^{n-1}(e^t)\right|\right) + \frac{2M}{t} \\
\leq & \frac{2M}{t}(C+1) + \frac{C}{t}\left|r_{\sigma(s)}^{m-1}(e^t) - r_{\sigma(s)}^{n-1}(e^t)\right| \\
\leq & \frac{2M(C+1)}{C} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{C}{t}\right)^j + \left(\frac{C}{t}\right)^{n-1} \left|r_{\sigma(s)}^{m-n+1}(e^t) - r_{\sigma(s)}^1(e^t)\right| \\
\leq & \frac{2M(C+1)}{C} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{C}{t}\right)^j + \left(\frac{C}{t}\right)^{n-1} M \\
\leq & \frac{3M(C+1)}{C} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{C}{t}\right)^j \leq \frac{3M(C+1)}{C} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{C}{t_r}\right)^j \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit konvergiert $r_s^n(t)$ für $t > t_g$ absolut und gleichmäßig. Da r_s^n als Funktion von λ betrachtet lokal gleichmäßig und damit kompakt konvergiert, hängt die Grenzfunktion $r_s(t)$ analytisch von λ ab.

(viii) Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}^*$ und $t \geq t_1 := \{t_g, t_r\}$ gilt $G_s^n(t) = t + g_s^n(t) + r_s^n(t)$, folglich ist $G_s^n(t)$ wohldefiniert.

Beweis der Behauptung: Durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang:

$$G_s^1(t) = \mathrm{Log}(e^t) - \mathrm{Log}\lambda + 2\pi i s_0 = t + g_s^1(t) + r_s^1(t).$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
G_s^{n+1}(t) &= \mathrm{Log}\big(G_{\sigma(s)}^n(e^t)\big) - \mathrm{Log}\lambda + 2\pi i s_0 \\
&= \mathrm{Log}\big(e^t + g_{\sigma(s)}^n(e^t) + r_{\sigma(s)}^n(e^t)\big) - \mathrm{Log}\lambda + 2\pi i s_0 \\
&= t + \mathrm{Log}\left(1 + \frac{g_{\sigma(s)}^n(e^t) + r_{\sigma(s)}^n(e^t)}{e^t}\right) - \mathrm{Log}\lambda + 2\pi i s_0 \\
&= t - \mathrm{Log}\lambda + 2\pi i s_0 + \frac{g_{\sigma(s)}^n(e^t)}{e^t} \\
&\quad + \mathrm{Log}\left(1 + \frac{g_{\sigma(s)}^n(e^t) + r_{\sigma(s)}^n(e^t)}{e^t}\right) - \frac{g_{\sigma(s)}^n(e^t)}{e^t} \\
&= t + g_s^{n+1}(t) + r_s^{n+1}(t).
\end{aligned}$$

(ix) Nach (iv) gilt für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und alle $t \geq t_1$ die Abschätzung $|g_s^n(t)| \leq M$; mit $|r_s^n(t)| \leq M$ nach (v) folgt aus $G_s^n(t) = t + g_s^n(t) + r_s^n(t)$ sofort $|G_s^n(t) - t| \leq 2M =: L^*$.

(x) Für $t \geq t_1 = \max\{t_g, t_r\}$ folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $G_s^n(t)$ für $n \to \infty$ aus der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz von $g_s^n(t)$ und $r_s^n(t)$, gleiches gilt für die analytische Abhängigkeit von λ.

(xi) Aus der Stetigkeit von $G_s^n(t)$ folgt unmittelbar die Stetigkeit von $G_s(t)$.

(xii) Die Funktionalgleichung ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
G_{\sigma(s)}(e^t) &= \lim_{n\to+\infty} L_{\lambda,s_1} \circ \ldots \circ L_{\lambda,s_n} \circ E^{\circ n+1}(t) \\
&= \lim_{n\to+\infty} E_\lambda\big(L_{\lambda,s_0} \circ L_{\lambda,s_1} \circ \ldots \circ L_{\lambda,s_n} \circ E^{\circ n+1}(t)\big) = E_\lambda G_s(t).
\end{aligned}$$

(xiii) Jetzt muß nur noch $G_s(t) = t - \mathrm{Log}\lambda + 2\pi s_0 + O(e^{-t})$ gezeigt werden.

$$\begin{aligned}
G_{\sigma(s)}^{n+1} &= t + g_{\sigma(s)}^{n+1}(t) + r_{\sigma(s)}^{n+1}(t) \\
&= t - \mathrm{Log}\lambda + 2\pi i s_0 + \frac{g_s^n(e^t)}{e^t} + r_{\sigma(s)}^{n+1}(t).
\end{aligned}$$

Da aber nach Schritt (vi) $r_s^{n+1}(t) \in O(e^{-t})$ für $t \to +\infty$ gilt, folgt $G_s(t) = t - \mathrm{Log}\lambda + 2\pi s_0 + O(e^{-t})$, wobei $O(e^{-t})$ wiederum nur von M abhängt. □

(4.6) SATZ. (Devaney–Strahl nahe Unendlich)
Für $\lambda \in \mathbb{C}'$ *und jede beschränkte formale Itinerary* s *existiert ein Devaney–Strahl mit dieser Devaney–Itinerary hinreichend weit rechts in der komplexen Ebene. Es existiert ein* $R > 0$*, so daß jedes* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(z) > R$*,* $\mathrm{Re}\big(E_\lambda^{\circ n}(z)\big) \to +\infty$ *für* $n \to +\infty$ *und* $S(z) = s$ *auf diesem Strahl liegt.*

Beweis: Hier kann man die Früchte von Satz 4.5 ernten: Die dort definierte Funktion $G_s(t)$ gibt nämlich eine Parametrisierung des Strahls zu einer vorgegebenen beschränkten formalen Itinerary an. Denn aus der Konjugationseigenschaft $E_\lambda G_s(t) = G_{\sigma(s)}(e^t)$ folgt $E_\lambda^{\circ n} G(t) = G_{\sigma^n(s)}\big(E^{\circ n}(t)\big)$. Also gilt $E_\lambda^{\circ n} G(t) \in R_\lambda(s_n)$, d.h. der Strahl hat tatsächlich die Devaney–Itinerary s. Aus $G_s(t) = t - \mathrm{Log}\lambda + 2\pi i s_0 + O(e^{-t})$ folgt unmittelbar $\mathrm{Re}\big(G_s(t)\big) \to +\infty$ für $t \to +\infty$. Außerdem folgt daraus für hinreichend große t

$$\mathrm{Re}\big(G_{\sigma^n(s)}(E^{\circ n}(t)\big) = \mathrm{Re}(E_\lambda^{\circ n}\big(G_s(t)\big) \to \infty$$

(hier geht die Bemerkung aus Satz 4.5 ein, nach der $O(e^{-t})$ nur von der Schranke der Devaney–Itinerary s abhängt, nicht aber von s selbst). Also ist $G_s(t)$ tatsächlich eine Parametrisierung des Devaney–Strahls mit der Devaney–Itinerary s. $R > 0$ wird so gewählt, daß für einen beliebigen Realteil größer als R ein Punkt auf dem Strahl mit diesem Realteil existiert.

Zu zeigen ist noch, daß jeder Punkt z mit der Devaney–Itinerary s, $\mathrm{Re}(z) > R$ und $\mathrm{Re}\big(E_\lambda^{\circ n}(z)\big) \to +\infty$ für $n \to +\infty$ auf dem Strahl mit dieser Devaney–Itinerary liegt. Die Beweisidee ist, eine konvergente Folge von Parametern zu konstruieren, so daß für den Grenzwert t^* gilt $G_s(t^*) = z$.
Zu diesem Zweck setzen wir

$$w_n := E_\lambda^{\circ n}(z)$$
$$u_n := \mathrm{Re}(w_n).$$

Also ist $u_n = \mathrm{Re}\big(E_\lambda^{\circ n}(z)\big)$, d.h. u_n strebt für $n \to +\infty$ nach $+\infty$. Außerdem gilt $w_{n+1} = E_\lambda(w_n)$. Sei $M^* := \sup\{|s_0|, |s_1|, \ldots\}$ und $z \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $\mathrm{Re}(z) > R$, $|\mathrm{Im}(z)| \le 2\pi M^*$. Es ist $E_\lambda(z) = |\lambda|\, e^x e^{i\alpha}$ mit $\alpha := y + \mathrm{Arg}\lambda$. Also existiert ein $c_0 \in \mathbb{R}$, so daß für jeden Punkt $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > R$, $|\mathrm{Im}(z)| \le 2\pi M^*$ gilt $\mathrm{Re}\big(E_\lambda(z)\big) = |\lambda|\, e^x \cos\alpha \ge |\lambda|\, e^x c_0 =: c_1 e^x$. Im folgenden wird c_1 als fest gewählt betrachtet, auch wenn R gelegentlich vergrößert wird.
Aus diesen Überlegungen ergibt sich, daß $u_{n+1} \ge c_1 e_n^u$ gilt.

Nach Satz 4.5 existiert ein $\tau > 1$, so daß für alle $u \ge \tau$ die Funktion $u \mapsto c_1 e^u$ konjugiert zu der Funktion $y \mapsto e^y$ ist (dies ergibt sich aus der Funktionalgleichung $G_{\sigma(s)}(e^t) = E_\lambda G_s(t)$, wobei hier $\lambda = c_1$ ist und $\sigma(s) = s$ die Folge mit lauter Nullern als Einträgen ist). Gegebenenfalls läßt sich durch Vergrößern von R erreichen, daß $R > \tau$ ist (c_1 soll dabei nicht verändert werden). Für $j = 0, \ldots, n$ können wir y_j so wählen, daß $u_j = G_s(y_j)$ gilt. Aus der Konjugationseigenschaft folgt dann für $j = 0, \ldots, n-1$ sofort $y_{j+1} = e^{y_j}$. Also läßt sich y_n durch den Logarithmus n-mal zurücktransportieren, d.h. $\ln^{\circ n}(y_n)$ ist wohldefiniert. Nach Satz 4.5 existiert ein L, so daß für $j = 0, \ldots, n$ die Abschätzung $|y_j - u_j| \leq L$ gilt. Es ist $u_0 \geq R$ und durch Vergrößern von R läßt sich erreichen, daß $|u_0 - L| > e$ gilt. Daraus folgt, daß sich y_n mindestens $n+1$-mal durch den Logarithmus zurücktransportieren läßt: Es ist $\ln^{\circ n}(y_n) = y_0$, und die letzte Abschätzung garantiert $y_0 > e$.

Dann gilt aber daß u_n sich mindestens n-mal durch den Logarithmus zurücktransportieren läßt, da $|y_n - u_n| \leq L$ gilt. Damit ist $t_n := \ln^{\circ n}(u_n)$ wohldefiniert. Daraus ergibt sich, daß für genügend groß gewähltes R (und damit hinreichend großes t_n) die Funktion $G_s^n(t_n)$ wohldefiniert ist (siehe Satz 4.5). Damit sind aber wegen $E^{\circ n}(t_n) = u_n$ für $k = 1, \ldots, n$ die Werte $z_n^k := L_{\lambda, s_{n-k}} \circ L_{\lambda, s_{n-k-1}} \ldots \circ L_{\lambda, s_{n-1}}(u_n)$ wohldefiniert.

Dann liegen für $k = 1, \ldots, n$ jeweils die Werte $z_n^k = L_{\lambda, s_{n-k}} \circ L_{\lambda, s_{n-k-1}} \ldots \circ L_{\lambda, s_{n-1}}(u_n)$ und $\tilde{z}_n^k := L_{\lambda, s_{n-k}} \circ L_{\lambda, s_{n-k-1}} \ldots \circ L_{\lambda, s_{n-1}}(w_n)$ im gleichen Sektor der Devaney–Partition; zur Abkürzung setzen wir noch $z_n^0 := u_n$ und $\tilde{z}_n^0 := w_n$. Die Definitionen von z_n^k und $\tilde{z}_n^k$ werden etwas natürlicher, wenn man sich klarmacht, daß z_n^n unsere gegebener Punkt z ist und — wie oben gezeigt — die Vereinbarung $t_n = \ln^{\circ n}(u_n)$ die Gleichheit $\tilde{z}_n^n = G_s^n(t_n)$ liefert.

Nach Satz 4.5 existiert eine Konstante L^*, so daß für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und alle $t \geq t_1$ die Abschätzung $|G_s^n(t) - t| \leq L^*$ gilt.

Die Konstante $R \geq t_1$ wird so gewählt, daß ein $k < 1$ existiert, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > R$ gilt

$$\left| \frac{d}{dz} L_{\lambda, s_j}(z) \right| = \left| \frac{d}{dz} \operatorname{Log}(z) \right| = \left| \frac{1}{z} \right| < k.$$

Dann folgt $\left| \tilde{z}_n^{k+1} - z_n^{k+1} \right| < k \left| \tilde{z}_n^k - z_n^k \right|$, also

$$|\tilde{z}_n^n - z_n^n| < k^n \left| \tilde{z}_n^0 - z_n^0 \right| = k^n \left| w_n - u_n \right| < 2\pi(s_n + 1)k^n < 2\pi(M^* + 1)k^n =: \tilde{M} k^n.$$

Wegen $z = z_n^n$ und $G_s^n(t_n) = \tilde{z}_n^n$ besagt die letzte Ungleichung aber nichts anderes als

$$|z - G_s^n(t_n)| < \tilde{M} k^n.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liegt t_n in der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt z und einem Radius, der nur von M^*, k und L^* abhängt:

$$|z - t_n| \leq |z - G_s^n(t_n)| + |G_s^n(t_n) - t_n| \leq \tilde{M} k^n + L^*.$$

Also existiert eine konvergente Teilfolge (t_{n_j}). Der Grenzwert dieser Folge wird mit t^* bezeichnet. Dann gilt

$$|z - G_s(t^*)| \leq \left| z - G_s^{n_j}(t_{n_j}) \right| + \left| G_s^{n_j}(t_{n_j}) - G_s^{n_j}(t^*) \right| - \left| G_s^{n_j}(t^*) - G_s(t^*) \right|,$$

und für $n_j \to +\infty$ werden die Terme auf der rechten Seite beliebig klein. Also ist $z = G_s(t^*)$, d.h. z liegt auf dem vorhin konstruierten Strahl. Und das wollten wir zeigen. □

Bemerkung. Die Funktionalgleichung $G_{\sigma(s)}(e^t) = E_\lambda G_s(t)$ zeigt, daß für eine vorgegebene Itinerary s die Dynamik auf dem Devaney–Strahl mit der Devaney–Itinerary s konjugiert zu $E(t) = e^t$ ist.

Diese Konjugation ist in gewisser Weise willkürlich: Statt $E(t) = e^t$ hätten wir jede andere streng monotone Funktion verwenden können, etwa $P^n(t) := t^n$ mit $n \neq 0$, die Translation $T(t) := t + 1$ oder $E_\kappa(t) = \kappa \exp(z)$ mit $\kappa > 0$ (letzteres ist auch eine Folgerung aus Satz 4.5: Da E_λ und E_κ auf einem gegebenen Strahl beide zu E konjugiert sind, folgt unmittelbar, daß E_λ auch zu E_κ konjugiert ist).

Wir haben die Exponentialfunktion $E(t)$ verwendet, da die Konjugation für jede Funktionen $E_\lambda(t)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ in der Nähe von Unendlich asymptotisch die Identität ist — für $E(t)$ ergibt sich das aus der Gleichung $G_s(t) = t - \mathrm{Log}\lambda + 2\pi i s_0 + O(e^{-t})$. Daher ist sachgerechter, eine Funktion $E_\lambda(t)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ zu wählen als etwa $P^n(t) = t^n$ mit $n \neq 0$ oder $T(t) = t + 1$. Prinzipiell macht es dann aber keinen wesentlichen Unterschied, welche Funktion $E_\lambda(t)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ verwendet wird — $E(t)$ wurde in der Hoffnung gewählt, daß die Rechnungen dadurch so einfach wie möglich werden.

Die Wahl der Konjugation wird bisher also in gewisser Weise durch das Verhalten „nahe Unendlich" gerechtfertigt. Ab jetzt wollen wir jedoch das „andere" Ende eines gegebenen Strahls untersuchen. Dafür wählen wir eine Konjugation, die dafür angemessener ist: Die Abbildung $F\colon u \mapsto e^u - 1$ ist streng monoton wachsend und besitzt genau einen indifferenten Fixpunkt, nämlich den Punkt 0. Die affine Abbildung $t \mapsto t + 1 =: u$ konjugiert die Abbildung F zur Abbildung $u \mapsto e^{u-1}$. Von dieser Abbildung wissen wir, daß sie für hinreichend große Parameter konjugiert zu E ist. Also sind E und F nahe Unendlich konjugiert, und im folgenden denken wir uns die Dynamik auf einem Devaney–Strahl konjugiert zu F. Jetzt transportieren wir den Devaney–Strahl so weit wie möglich zurück: Jede Zusammenhangskomponente des Urbildes eines Devaney–Strahl unter E_λ ist wieder ein Devaney–Strahl. Ein Punkt, der zum Parameter u gehört, wird dabei auf den Punkt zum Parameter $\ln(u + 1)$ abgebildet. Entweder läßt sich dieser Rücktransport unendlich oft durchführen; dann ist 0 als indifferenter Fixpunkt von $F(u)$ Grenzwert der Folge der Parameter $u, \ln(u + 1), \ln\bigl(\ln(u + 1) + 1\bigr), \ldots$. Oder ein Urbild enthält den singulären Wert; in diesem Fall transportieren wir nur bis zum singulären Wert zurück. Das Ergebnis wird beidesmal als ***dynamischer Strahl*** bezeichnet.

§5. Das Landeverhalten dynamischer Strahlen

Die zentrale Aussage dieses Abschnitts ist, daß die in §4 konstruierten periodischen und vorperiodischen Strahlen im postsingulär endlichen Fall tatsächlich landen. Auch die Umkehrung wird gezeigt: Im postsingulär endlichen Fall ist jeder repulsive periodische oder vorperiodische Punkt Landepunkt mindestens eines dynamischen Strahls. Der besonders interessante, in [DGH86] ausgesparte Fall „nichtregulärer Itineraries“ ist dabei immer zugelassen; dies ist ein Hauptergebnis der Arbeit.

Zunächst wollen wir eine Idee aus der Iterationstheorie von Polynomen der Art $z \mapsto z^d + c$ übertragen: Nach Satz 3.5 existiert im Fall eines echt vorperiodischen kritischen Orbits (mindestens) ein Polynomstrahl, der am singulären Wert landet. Wählt man einen dieser Polynomstrahlen aus und betrachtet dessen Urbilder, so partitionieren diese Urbilder die dynamische Ebene. Diese Idee läßt sich (noch) nicht direkt auf postsingulär endliches E_λ übertragen, da (noch) nicht gezeigt ist, daß im postsingulär endlichen Fall ein dynamischer Strahl existiert, der am singulären Wert landet. Aber in Satz 3.7 wurde für PSP-Parameter λ die Existenz einer Fixspinne für E_λ bewiesen. Betrachten wir nun alle Urbilder des Beines, das am singulären Wert landet: Diese Urbilder partitionieren die dynamische Ebene. Es wird sich zeigen, daß sich mit dieser Partition die Schwierigkeiten umgehen lassen, die bei der Verwendung der Devaney–Partition auftreten. Allerdings hängt diese Konstruktion von der Wahl der Spinne ab: Zwei zueinander äquivalente Fixspinnen definieren verschiedene Partitionen. Doch zunächst gilt offensichtlich, daß kein Punkt des singulären Orbits auf einer Partitionsgrenze liegen kann. Also ist es sinnvoll (wenn auch willkürlich), für eine von einer Fixspinne stammende Partition den Sektor als Nullsektor zu bezeichnen, der den singulären Wert 0 enthält. Eine so erhaltene Partition wird im folgenden ***Spinnenpartition*** genannt.

Sind zwei Spinnenpartitionen gegeben, die von zueinander äquivalenten Fixspinnen stammen, so ist für einen Punkt des singulären Orbits die Sektornummer wohldefiniert und stimmt für beide Partitionen überein: Sind ϕ, ψ die beiden zueinander äquivalenten Fixspinnen, so sind die Beine am singulären Wert zueinander definitionsgemäß homotop rel der Punkte des singulären Orbits. Also sind auch die Urbilder zueinander homotop rel der Punkte des singulären Orbits, d.h. der Sektor eines Punktes des singulären Orbits ist eindeutig bestimmt.

(5.1) DEFINITION. (Knetfolge)
*Die **Knetfolge** der Abbildung E_λ ist die Folge der Sektoren des singulären Orbits in Bezug auf die Spinnenpartition, beginnend mit dem singulären Wert.*

Definitionsgemäß beginnen Knetfolgen also immer mit dem Eintrag 0.

(5.2) SATZ. (Exponentialfixspinne aus Strahlen)
Für die Exponentialfunktion E_λ existiert im postsingulär endlichen Fall für jeden Punkt des singulären Orbits (mindestens) ein (vor–)periodischer dynamischer Strahl, der an diesem Orbitpunkt landet. Ein Strahl am singulären Wert und alle seine Vorwärtsbilder unter E_λ bilden eine Fixspinne aus dynamischen Strahlen, deren Beine am singulären Orbit landen. Dabei ist diese Fixspinne unter der Spinnenabbildung sogar als Punktmenge invariant (also bleibt nicht nur die Homotopieklasse invariant).

Beweis: Aus Satz 3.7 ist bekannt, daß im postsingulär endlichen Fall eine Exponentialfixspinne existiert. Mit l wird wieder die Vorperiode bezeichnet. Das Bein, das an dem Punkt $E_\lambda^{\circ l}(0) = E_\lambda^{\circ n}(0)$ landet, sei wieder mit γ_l bezeichnet. Für dieses Bein läßt sich die Devaney–Itinerary wie folgt definieren: Die Partitionsgrenzen der Devaney–Partition sind die Urbilder der negativen reellen Achse unter E_λ^{-1}, das Bein γ_l ist ein Urbild von γ_{l+1} unter E_λ^{-1}. Wegen $\mathrm{Re}\big(\gamma_{l+1}(t)\big) \to +\infty$ für $t \to +\infty$ existiert ein $t_0 \in [0, +\infty)$, so daß $\mathrm{Re}\big(\gamma_{l+1}(t)\big) > 0$ für alle $t \geq t_0$. Da sich die dann die negative relle Achse und der Teil des Beines γ_{l+1} zu Parametern $t \geq t_0$ nicht schneiden, können sich auch die deren Urbilder nicht schneiden — folglich schneidet γ_l ab einem gewissen Parameter t_1 die Partitionsgrenzen nicht.

Ganz analog läßt sich für die Bilder $E_\lambda^{\circ l+1}, \ldots, E_\lambda^{\circ n-1}(\gamma_0)$ argumentieren; also läßt sich auf kanonische Weise für γ_l die Devaney–Itinerary s definieren. Ist s diese Itinerary, so existiert ein dynamischer Strahl $g_{\lambda,s}$ mit s als Devaney–Itinerary.

Da γ_l und $g_{\lambda,s}$ übereinstimmende Itineraries bezüglich der Devaney–Partition haben, stimmt die Anordnung γ_l und seinen Vorwärtsiterierten mit der Anordnung von $g_{\lambda,s}$ mit seinen Vorwärtsiterierten nahe Unendlich überein (Für Beine, die in verschiedenen Sektoren der Devaney–Partition liegen, ist das trivial. Für mehrere Beine im gleichen Sektor liegen die genügend oft Vorärtsiterierten dieser Beine in verschiedenenen Sektoren, woraus die Übereinstimmung der Anordnung der Beine und der dynamischen Strahlen folgt. Kurz: Die Anordnung der dynamischen Strahlen und der Beine entspricht der lexikographischen Anordnung ihrer Devaney–Itinerary). Daher kann das Bein γ_l so homotopiert werden, daß es ab einem Parameter t_2 mit dem Strahl $g_{\lambda,s}$ übereinstimmt.

Mit U bezeichnen wir das Gebiet, das entsteht, wenn man aus $\mathbb{C}$ den singulären Orbit entfernt. Die hyperbolische Metrik in U wird als d_U notiert. Sei v_0 ein Punkt auf dem Bein γ_l im Linearisierungsbereich des periodischen Endpunktes $\gamma_l(0)$, w_0 ein Punkt des Beines zu einem Parameter größer als t_1 und s der hyperbolische Abstand in U zwischen v_0 und w_0.

Dann gilt, daß der Rücktransport Abstände verkürzt: $E_\lambda \colon E_\lambda^{-1}(U) \to U$ ist als holomorphe Überlagerung eine lokale Isometrie, und $E_\lambda^{-1}(U)$ ist eine echte Teilmenge von U. Durch das „Stopfen“ der zusätzlich aufgetretenen Löcher entsteht also eine Kontraktion.

Bezeichnet k wieder die Periode, so soll E_λ^{-1} jeweils den Zweig bedeuten, der ein Bein auf sein Bild unter der zugehörigen Spinnenabbildung abbildet (und auf einer Umgebung des Beines definiert ist; der Zweig ergibt sich durch analytische Fortsetzung der Funktion, die dem Endpunkt sein Urbild auf dem singulären Orbit zuordnet; dabei erfolgt die analytische Fortsetzung längs des Beines). Schreiben wir zur Abkürzung

$$v_j := \left(E_\lambda^{-1}\right)^{\circ kj}(v_0)$$

und analog

$$w_j := \left(E_\lambda^{-1}\right)^{\circ kj}(w_0),$$

so gilt also $d_U(v_j, w_j) < s$ für $j \geq 1$.

Außerdem gilt $\lim_{j\to+\infty} v_j = z_l \notin U$. Daher geht der euklidische Radius der hyperbolischen Kreise um v_j mit Radius s gegen Null. Damit gilt $|w_j - z_l| \leq |w_j - v_j| + |v_j - z_l| \to 0$ für $j \to +\infty$.

Also konvergiert (w_n) unter $(E_\lambda^{-1})^{\circ k}$ gegen z_l. Sobald gezeigt ist, daß dies auch für einen beliebigen Punkt $\tilde{w}$ des dynamischen Strahls zwischen w_0 und w_1 gilt, ist gezeigt, daß dieser Strahl landet.

Verbindet man $\tilde{w}$ mit w_0 durch eine C^∞–Kurve, die ganz im Definitionsgebiet des betrachteten Zweiges E_λ^{-1} liegt, so hat diese Kurve eine endliche Länge, etwa l. Unter Rückwärtsiteration kann der hyperbolische Abstand nicht größer werden; bezeichnet $\tilde{w_j}$ das j-te Rückwartsiterierte von $\tilde{w}$, so gilt also $d_U(w_j, \tilde{w_j}) \leq l$. Wegen $w_j \to z_\sigma \in \partial U$ für $j \to \infty$ folgt daraus aber, daß der euklidische Abstand zwischen w_j und $\tilde{w_j}$ gegen Null geht. Da $\tilde{w}$ beliebig auf dem Strahl zwischen w_0 und w_1 gewählt war, folgt, daß der Strahl landet.

Dies Existenz einer Fixspinne aus dynamischen Strahlen folgt jetzt ganz leicht: Man wählt einen dynamischen Strahl, der am singulären Wert landet. Die Vereinigung dieses dynamischen Strahls und aller seiner Bilder unter E_λ ist konstruktionsgemäß eine Fixspinne. □

Damit ist gesichert, daß im PSP-Fall mindestens ein dynamischer Strahl am singulären Wert landet. Dessen Urbilder partitionieren die dynamische Ebene; die so erhaltene Partition wird ***dynamische Partition*** genannt. Ist die Itinerary eine Punktes bezüglich einer dynamischen Partition wohldefiniert, nennen wir sie ***dynamische Itinerary***. Für die im folgenden betrachteten (vor–)periodischen Punkte ist die dynamische Itinerary immer wohldefiniert. Da mehrere Strahlen am singulären Wert landen können, kann es mehrere dynamische Partitionen geben.

Hier eine kurze Übersicht über alle verwendetet Partitionen:

- Die Devaney–Partition wird durch die Urbilder der negativen rellen Achse definiert. Die Devaney–Partition entspricht dem externen Winkel für Polynome; bisweilen wird sie auch als externe Adresse bezeichnet.
- Die Urbilder des Beines am singulären Wert bilden die Grenzen der Spinnenpartition; diese Partition existiert nur für PSP-Parameter. Nur für Punkte des singulären Orbits ist die Itinerary bezüglich der Spinnenpartition wohldefiniert.
- Ebenfalls nur für PSP-Parameter definiert ist die gerade eingeführte dynamische Partition. Im Polynomfall nennt man die dynamische Itinerary auch einfach Itinerary.

(5.3) Satz. ((Vor-)periodische Strahlen landen im PSP-Fall)
Ist λ ein PSP-Parameter, so landet jeder periodische und jeder vorperiodische Strahl bei einem repulsiven periodischen bzw. vorperiodischen Punkt in $\mathbb{C}$.

Beweis: Wir bezeichnen mit U das einfach zusammenhängende Gebiet, das entsteht, wenn man aus $\mathbb{C}$ einen dynamischen Strahl am singulären Wert und alle seine Vorwärtsbilder entfernt. Der Rücktransport eines Strahls mittels einer geeigneten Inversen E_λ^{-1} von E_λ ist eine Kontraktion bezüglich der hyperbolischen Metrik d_U auf U (denn $E_\lambda\colon E_\lambda^{-1}(U) \to U$ ist eine holomorphe Überlagerung und daher eine lokale Isometrie, und $E_\lambda^{-1}(U)$ ist eine echte Teilmenge von U).

Betrachtet man einen beliebigen periodischen dynamischen Strahl und darauf einen Punkt w_0, so läßt sich dieser dynamische Strahl beliebig oft zurücktransportieren, sofern der Strahl dabei nicht auf den singulären Wert trifft. Bezeichnet man dabei das Bild des Punktes w_k unter dem Rücktransport mit w_{k+1} und den hyperbolischen Abstand zwischen w_0 und w_1 mit s, so gilt $d_U(w_k, w_{k+1}) < s$ für $k \geq 1$.

Behauptung: Gibt es eine abgeschlossene Menge $K_1 \subseteq U$ derart, daß $\{\mathrm{Re}(z) \mid z \in K_1\}$ beschränkt ist und unendlich viele w_k in K_1 enthalten sind, so ist die Folge (w_k) ab einem gewissen Folgenglied komplett in einer K_1 umfassenden abgeschlossenen Menge $K_2 \subseteq U$ enthalten und konvergiert gegen einen Punkt in K_2.

Beweis: Sei $K_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid d_U(z, K_1) \leq s\}$ die um s vergrößerte Menge. Zur Abkürzung wird $d_k := d_U(w_k, w_{k+1})$ gesetzt.

Nun verwenden wir, daß durch das Stopfen der Löcher eine Kontraktion entsteht. Betrachtet man $E_\lambda^{-1}\colon U \to \mathbb{C}$, so existiert ein $\tilde{\eta} < 1$, so daß $d_{k+1}/d_k < \tilde{\eta}$ gilt (da zum einen $E_\lambda^{-1}(U)$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist und zum anderen die ergänzten Punkte regelmäßig angeordnet sind: Es ist der singuläre Orbit und seine Translate um ein ganzzahliges Vielfachen von $2\pi i$). Entfernt man den singulären Orbit wieder aus $\mathbb{C}$, so wird die minimale Kontraktion η' für die so definierte Abbildung größer als $\tilde{\eta}$. Allerdings existiert ein Kompaktum $K \subseteq K_2$, das den singulären Orbit enthält, so daß die Kontraktion für Punkte außerhalb des Kompaktums nach oben durch $\tilde{\eta}' := \eta + \frac{1-\tilde{\eta}}{2}$ beschränkt ist. Innerhalb des Kompaktums sei die Kontraktion durch den Faktor η'' beschränkt. Sei $\eta := \max\{\eta', \eta''\}$. Liegt w_k in K_2, gilt also $d_{k+1}/d_k < \eta$.

Sei $\varepsilon := s(1-\rho)$. Da nach Voraussetzung unendlich viele w_k in K_1 liegen, existiert ein Index $k \in \mathbb{N}$, so daß $w_k \in K_1$ und $d_k < \varepsilon$. Falls nicht alle w_m mit $m \geq k$ in K_2 liegen, existiert ein $l \in \mathbb{N}^*$, so daß $w_k, \ldots, w_{k+l} \in K_2$ und $w_{k+l+1} \notin K_2$. Dann haben wir

$$d_U(w_k, w_{k+l+1}) \leq \sum_{j=k}^{k+l} d_j \leq d_k \sum_{j=0}^{l} \rho^j < \frac{d_k}{1-\rho} \leq \frac{\varepsilon}{1-\rho} = s,$$

also ist $w_{k+l+1} \in K_2$ im Widerspruch zur Wahl von l.

Ist $m \geq k$ beliebig gewählt, so folgt

$$d_U(w_k, w_m) \leq \sum_{j=k}^{m-1} d_j \leq d_k \sum_{j=0}^{m-k-1} \rho^j < \frac{d_k}{1-\rho} \leq \frac{\varepsilon}{1-\rho} = s,$$

also ist w_m für alle $m \geq k$ in der hyperbolischen Kreisscheibe mit Radius s um den Mittelpunkt w_k enthalten. Daher konvergiert die Folge, und das wollten wir zeigen.

Die weitere Untersuchung kann sich also auf solche Strahlen beschränken, die jede abgeschlossene Menge in U mit beschränktem Realteil nur endlich oft betreten, also (mindestens) einen Punkt des singulären Orbits oder ∞ als Häufungspunkt haben. Ein solcher Punkt muß jedoch der Grenzwert sein: Denn angenommen, zwei der obigen Punkte wären verschiedene Häufungspunkte von (w_k): Wir entfernen aus U offene Umgebungen um jeden Punkt des singulären Orbits und alle Punkte, deren Realteil betragsmäßig hinreichend groß ist — und zwar so, daß die Ränder der neu entstandenen Menge mindestens den hyperbolischen Abstand $2s$ voneinander haben. Es entsteht also eine abgeschlossene Menge mit beschränktem Realteil. Sie soll mit K_1 bezeichnet werden. Existieren zwei verschiedene Häufungspunkte, so muß die Folge (w_k) unendlich oft zwischen den zugehörigen Umgebungen hin- und herpendeln und dabei liegt wegen $d_U(w_k, w_{k+1}) < s$ für $k \geq 1$ jedesmal mindestens ein Folgenglied in K_1. Also liegen unendlich viele Folgenglieder in K_1 — dann existiert nach den obigen Ausführungen aber ein Grenzwert in K_2, im Widerspruch zur Annahme.

Zu zeigen ist also nur noch, daß der Strahl nicht wieder nach Unendlich entkommen kann. Präziser: Wir müssen nur noch den Fall untersuchen, in dem $|\mathrm{Re}(w_k)| \to +\infty$ für $k \to +\infty$ gilt. Es existiert ein $R > 0$, so daß Punkte mit einem Realteil größer als R unter jedem Zweig von E_λ^{-1} auf Punkte mit kleinerem Realteil abgebildet werden. Damit scheidet der Fall $\mathrm{Re}(w_k) \to +\infty$ für $k \to +\infty$ aus, mehr noch: für jedes $\mathrm{Re}(w_k) > R$ existiert ein $w_k + p$ mit $|\mathrm{Re}(w_{k+p})| < R$. Also wird die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| \leq R$ unendlich oft betreten; wie wir gerade gezeigt haben, existiert dann ein Grenzwert in $\mathbb{C}$.

Außerdem existiert ein $R' < 0$, so daß Punkte mit einem Realteil kleiner als R' auf Punkte mit einem Realteil größer als R abgebildet werden — und für diesen Fall hatten wir ja gerade gezeigt, daß dann ein Grenzwert in $\mathbb{C}$ existiert.

Selbstverständlich ist der Landepunkt eines periodischen bzw. vorperiodischen dynamischen Strahls wieder periodisch bzw. vorperiodisch; und im PSP-Fall ist jeder periodische Orbit repulsiv. □

Bemerkung. Die Beschränkung auf PSP-Parameter ist wahrscheinlich nicht wesentlich; vermutlich gilt dieses Ergebnis viel allgemeiner — zum Beispiel für jeden Parameter, für den der singuläre Orbit beschränkt ist.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß im postsingulär endlichen Fall jeder vorperiodische oder periodische repulsive Punkt Landepunkt von mindestens einem dynamischen Strahl ist. Zunächst erinnern wir noch einmal an die analoge Aussage für Polynome der Art $z \mapsto z^d + c$.

(5.4) SATZ. (A. DOUADY, J.–C. YOCCOZ)
Jeder repulsive periodische Punkt eines Polynoms mit zusammenhängender Julia–Menge ist Landepunkt mindestens eines, höchstens aber endlich vieler dynamischer Strahlen.

Für den *Beweis* siehe [Hub93], [Sch97]. Im Beweis geht wesentlich ein, daß der Grad d des Polynoms endlich ist; daher läßt sich dieser Beweis nicht auf E_λ übertragen.

(5.5) LEMMA. (Dynamische Itinerary und Devaney–Itinerary)
Sei t eine Knetfolge und s eine periodische dynamische Itinerary. Dann existiert eine periodische Devaney–Itinerary u, so daß der dynamische Strahl mit dieser Devaney–Itinerary die dynamische Itinerary s hat.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß ein Polynom genügend hohen Grades existiert, so daß für dieses Polynom ein dynamischer Polynomstrahl mit der dynamischen Itinerary u existiert. Sei M der Betrag des betragsgrößten Eintrages von u. Der Polynomgrad d wird so gewählt, daß $d > 2M$ gilt. Das Polynom soll so bestimmt werden, daß seine Julia–Menge eine Cantormenge ist. Dann existiert für jede periodische dynamische Itinerary ein (zwangsläufig periodischer) Punkt p mit dieser dynamischen Itinerary. Könnten wir Satz 5.4 anwenden, würde also ein dynamischer Polynomstrahl existieren, der bei p landet und damit die dynamische Itinerary u besitzt. Jedoch sind wir von einem Polynom ausgegangen, dessen Julia–Menge eine Cantormenge, also total unzusammenhängend, ist. Hier hilft ein Trick: Wir betrachten den zu diesem Polynom gehörenden Parameterstrahl. Es landet an einem Parameter, dessen Julia–Menge zusammenhängend ist. Nun hängen Landepunkte dynamischer Polynomstrahlen stetig vom Parameter ab; betrachtet man also einen Parameter auf dem Parameterstrahl in einer kleinen Umgebung des Landepunkts, so existiert für das dazugehörige Polynom nach wie vor ein dynamischer Polynomstrahl, der an einem Punkt mit der vorgegebenen dynamischen Itinerary landet. Das wollten wir zeigen.

Der externe Winkel dieses dynamischen Polynomstrahls soll mit s bezeichnet werden.

Nun beschreibt u für jeden Grad größer oder gleich d einen den externen Winkel eines dynamischen Strahls, dessen Itinerary s ist. Insbesondere folgt damit die Behauptung für E_λ unmittelbar. □

(5.6) LEMMA. (Eindeutigkeit der dynamischen Itinerary)
Ist λ ein PSP-Parameter, so gilt für E_λ: Verschiedene periodische Punkte haben verschiedene dynamische Itineraries.

Beweis: Um die Notation einfach zu halten, zeigen wir nur den Fall zweier Fixpunkte. Der allgemeine Fall zweier periodischer Punkte geht ganz analog, erfordert aber etwas mehr Buchhaltung. Sei U das hyperbolische Gebiet, das durch Entfernen eines dynamischen Strahls am singulären Wert und aller seiner Vorwärtsbilder aus der komplexen Ebene entsteht. Seien p_1, p_2 zwei Fixpunkte mit der gleichen dynamischen Itinerary. Zunächst wird angenommen, daß beide in U liegen. Auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet U läßt sich eine Inverse E_λ^{-1} von E_λ so bestimmen, die p_1 invariant läßt. Dann ist E_λ^{-1} auf U eine echte Kontraktion (das Komplement ist vorwärtsinvariant). Daher wird der hyperbolische Abstand der beiden Punkte unter dem Rücktransport echt kleiner; für Fixpunkte ist dies aber nur möglich, wenn sie übereinstimmen. Deshalb kann angenommen werden, daß mindestens einer der beiden Punkte auf dem Rand des hyperbolischen Gebiets liegt. Wir denken uns die beiden Punkte durch eine Kurve verbunden; diese Kurve hat dann notwendigerweise unendliche Länge. Da λ ein PSP-Parameter ist, sind p_1 und p_2 beide repulsiv. Also kann man je einen Punkt in den beiden Linearisierungumgebungen betrachten. Der hyperbolische Abstand dieser beiden Punkte verkürzt sich unter dem Rüchtransport; da aber mindestens einer der Punkte gegen einen Randpunkt von U konvergiert, muß der andere Punkt gegen den gleichen Punkt konvergieren, was die Behauptung zeigt.

□

(5.7) Satz. (Jeder (vor–)periodische Punkt ist Landepunkt)
Ist der postsinguläre Orbit von E_λ endlich, so ist jeder vorperiodische oder periodische repulsive Punkt Landepunkt mindestens eines dynamischen Strahls; nur endlich viele dynamische Strahlen landen an diesem Punkt.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall eines repulsiven periodischen Punktes p; ist gezeigt, daß an solchen Punkten dynamische Strahlen landen, folgt die Behauptung für vorperiodische dynamische Strahlen unmittelbar.

Nach Satz 5.2 existiert eine Fixspinne aus dynamischen Strahlen. Die Urbilder des dynamischen Strahls am singulären Wert bilden eine Partition der dynamischen Ebene. Auf den Partitionsgrenzen liegt kein periodischer Punkt; daher ist die dynamische Spinnenitinerary s für den repulsiven periodischen Punkt p wohldefiniert.

Nach Lemma 5.5 existiert eine periodische Devaney–Itinerary u, deren dynamische Itinerary s ist. In Satz 4.6 wurde gezeigt, daß zu gegebener periodischer Itinerary u ein dynamischer Strahl mit dieser Devaney–Itinerary existiert. Nach Satz 5.3 landet dieser Strahl an einem repulsiven periodischen Punkt. Die dynamische Itinerary dieses Punktes stimmt mit der des dynamischen Strahls und damit mit der des gegebenen Punktes p überein. Also sind die beiden Punkte nach Lemma 5.6 identisch. □

Zum Schluß soll noch angemerkt werden, daß der in der Arbeit [DGH86] ausgesparte Fall einer Devaney–Itinerary mit (mindestens) einem Eintrag Null in Wirklichkeit ein besonders interessanter Fall ist.

Das nächste Lemma zeigt die Besonderheit „regulärer Itineraries“ (deren Einträge definitionsgemäß alle von Null verschieden sind). In gewisser Weise zeigen die folgenden Lemmas die Stärke und zugleich auch die Beschränktheit der Arbeit [DGH86]: Mit einer verhältnismäßig einfacher Partition wird die Existenz eines dynamischen Strahls zu einer beschränkten regulären Itinerary gezeigt; aber der ausgesparte Fall nichtregulärer Itineraries unterscheiden sich ganz wesentlich vom Fall regulärer Itineraries.

(5.8) Lemma. (Reguläre Itineraries und die Devaney–Partition)
Dynamische Strahlen zu reguläre Itineries schneiden oder berühren die Partitionsgrenzen der Devaney–Partition nicht, verlaufen also vollständig innerhalb eines Streifens der Devaney–Partition.

Beweis: Schneidet oder berührt ein dynamischer Strahl eine Partitionsgrenze der Devaney–Partition, so schneiden oder berühren sich auch deren Bilder unter E_λ. Da die Partitionsgrenzen aber auf die negative reelle Achse abgebildet werden, die im Streifen $R(0)$ liegt, müßte die Devaney–Itinerary des dynamischen Strahls den Eintrag 0 enthalten, da dann ein Vorwärtsiteriertes des Strahls im Streifen $R(0)$ liegt. □

(5.9) Lemma. (Dynamische Strahlen mit gleicher Itinerary)
Landen für $\lambda \in \mathbb{C}'$ mehrere dynamische Strahlen mit beschränkter Devaney–Itinerary am gleichen Punkt, so muß ihre Devaney–Itinerary den Eintrag 0 enthalten.

Beweis: Wir nehmen an, daß zwei dynamische Strahlen existieren, die am selben Punkt landen und reguläre Itineraries besitzen (alle Einträge der Devaney–Itinerary sind also von Null verschieden). Nach Lemma 5.8 verlaufen sie vollständig innerhalb eines Streifens der Devaney–Partition. Also stimmt der erste Eintrag ihrer Devaney–Itinerary überein. Die gleiche Argumentation trifft auf die Vorwärtsbilder der dynamischen Strahlen zu. Daraus folgt, daß beide Strahlen übereinstimmende Devaney–Itinerary besitzen. Nach Satz 4.6 stimmen die beiden dynamischen Strahlen dann überein. □

Ein Spezialfall davon ist:

(5.10) Corollar. (Mehrere Strahlen am singulären Wert)
Ist die dynamische Itinerary des singulären Werts beschränkt und es landet mehr als ein dynamischer Strahl am singulären Wert, so enthält die Devaney–Itinerary dieser Strahlen den Eintrag Null. □

Bemerkung. Ein vollständiges Verständnis der dynamischen Strahlen, die am singulären Wert landen, ist sehr wichtig: Im Polynomfall korrespondieren diese Strahlen mit den Parameterstrahlen, die am zugehörigen Parameter landen.

Anhang A. Polygonspinnen

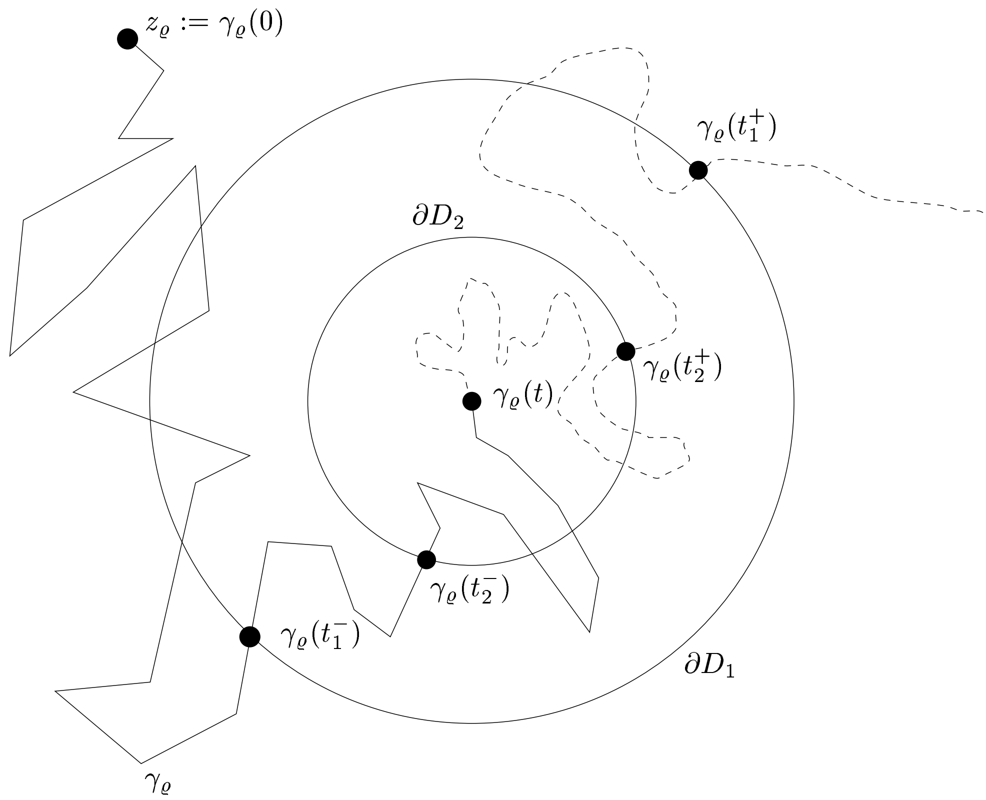
Hier wird noch auf elementare Weise gezeigt, daß für jede Spinne eine äquivalente Spinne mit überschaubaren Eigenschaften existiert: Jedes Bein ist ein Geradenzug, bestehend aus einer endlichen Anzahl von Segmenten. Hinreichend weit rechts in der komplexen Ebene verlaufen alle Beine parallel zur reellen Achse.

Die hier gewonnenen Ergebnisse werden in Anhang B in ein Computerprogramm umgesetzt. Im folgenden wird angenommen, daß die Beine von 0 bis 1 parametrisiert sind statt von 0 bis $+\infty$.

(A.1) LEMMA. (Äquivalente Polygonspinne)
Jede Spinne ist äqivalent zu einer Spinne, deren Beine jeweils aus einem Streckenzug (aus endlich vielen Geradenstücken) bestehen.

Beweis: Betrachten wir ein fest gewähltes Bein γ_ϱ. Für dieses Bein existiert außerhalb einer kleinen Kreisscheibe um ∞ eine Umgebung U, die kein anderes Bein γ_σ mit $\sigma \neq \varrho$ enthält oder schneidet. Da Beine nach Definition injektiv und stetig sind, existiert eine kreisförmige Umgebung $D(0)$ von $z_\varrho := \gamma_\varrho(0)$, deren Rand $\partial D(0)$ von γ_ϱ nur einmal geschnitten wird. Also kann γ_ϱ innerhalb von $D(0)$ durch eine Strecke dargestellt werden.

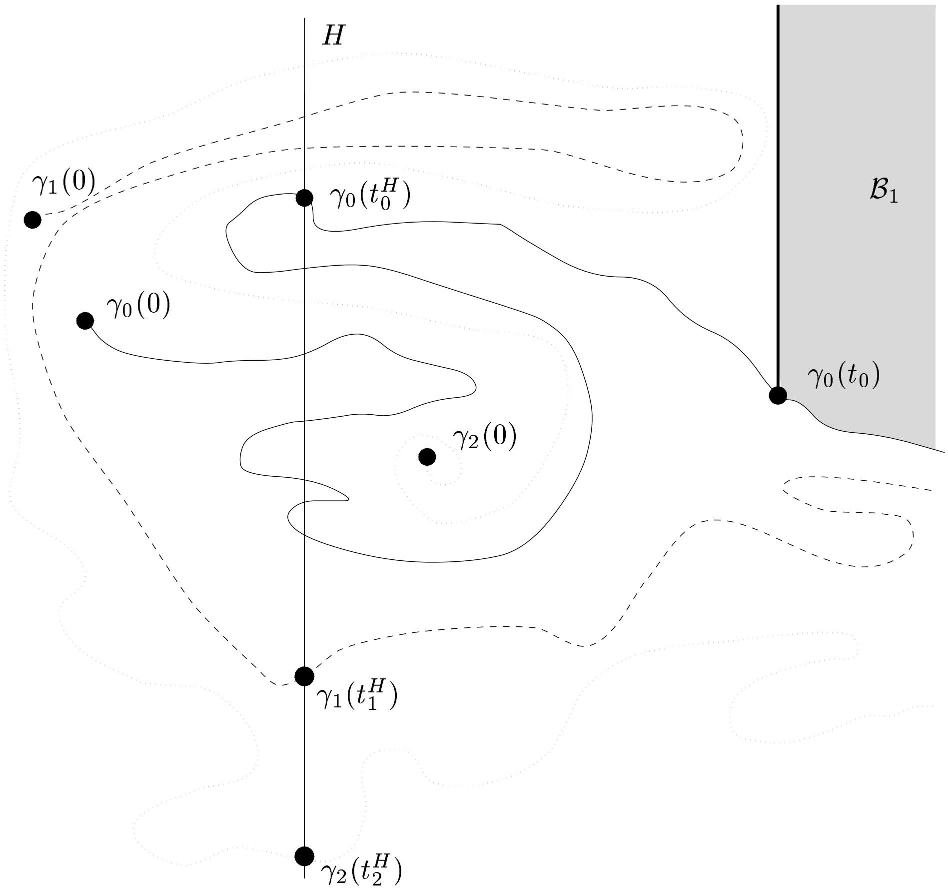
Das nächste Bild zeigt eine Reihe von Variablen, die im folgenden benützt werden:



Wir betrachten jeweils den Endpunkt $\gamma_\varrho(t)$ des bisher konstruierten Polygonzuges; um ihn herum existiert eine Kreisscheibe $D_1 \subseteq U$, die z_ϱ nicht enthält. Ist t_1^- der größte Parameter mit $\gamma_\varrho(t_1^-) \in \partial D_1$ und $t_1^- < t$ und t_1^+ der kleinste Parameter mit $\gamma_\varrho(t_1^+) \in \partial D_1$ und $t_1^+ > t$, so existiert eine Kreisscheibe D_2 um $\gamma_\varrho(t)$ in D_1, die von γ_ϱ nur für Parameter τ mit $t_1^- < \tau < t_1^+$ geschnitten wird.

Ist t_2^+ der größte Parameter mit $\gamma_\varrho(t_2^+) \in \partial D_2$, so ist $\gamma_\varrho|_{[t,t_2^+]}$ homotop (rel der Endpunkte) zu der Strecke zwischen $\gamma_\varrho(t)$ und $\gamma_\varrho(t_2^+)$ (bezeichnet t_2^- den kleinsten Parameter mit $\gamma_\varrho(t_2^-) \in \partial D_2$, so ist $\gamma_\varrho|_{[t_2^-,t]}$ homotop rel der Endpunkte zu der Strecke zwischen $\gamma_\varrho(t_2^-)$ und $\gamma_\varrho(t)$). Somit erhält man $\gamma_\varrho(t_2^+)$ als neuen Endpunkt und kann das Verfahren iterieren. — Konvergiert die Länge der so konstruierten Strecken gegen Null, so konvergieren die zugehörigen Parameter t als monoton wachsende und nach oben durch 1 beschränkte Folge gegen einen Grenzwert $t^* \in [0,1]$. Konstruiert man D_1 sowie D_2 für t^*, so kann man den Polygonzug bis zu einem Punkt $\gamma_\varrho(t)$ für $t_2^- < t < t^*$ definieren, um die Strecke zwischen $\gamma_\varrho(t)$ und $\gamma_\varrho(t^*)$ ergänzen und mit $\gamma_\varrho(t^*)$ als neuem Endpunkt fortfahren.

Die nächste Skizze soll das im weiteren beschriebene Vorgehen illustrieren.



Zu zeigen ist, daß die Beine so modifiziert werden können, daß das Verfahren nach endlich vielen Schritten abgebrochen werden kann und die dann konstruierte Spinne äquivalent zur anfangs gegebenen Spinne ist. Die Idee dabei ist, die Ordnung der Beine nahe ∞ auszunützen und für genügend große Realteile die Beine durch waagerechte Strahlen darzustellen.

Es gilt $\lim_{t\to 1}\mathrm{Re}\big(\gamma_\sigma(t)\big)=+\infty$ für $\sigma=0,\dots,n-1$, also existiert eine Parallele H zur imaginären Achse, die alle Beine mindestens einmal schneidet. Markiert t_σ^H für $\sigma=0,\dots,n-1$ den größten Zeitpunkt mit $\gamma_\sigma(t_\sigma^H)\in H$, so können wir uns die Beine so numeriert denken, daß $\mathrm{Im}\big(\gamma_0(t_0^H)\big)>\mathrm{Im}\big(\gamma_1(t_1^H)\big)>\dots>\mathrm{Im}\big(\gamma_{n-1}(t_{n-1}^H)\big)$. Wiederum wegen $\lim_{t\to 1}\mathrm{Re}\big(\gamma_\sigma(t)\big)=+\infty$ existiert dann ein $t_0\in[0,1]$, so daß γ_0 für $t\ge t_0$ beliebig weit nach oben verschoben werden kann, ohne die Homotopieklasse zu ändern: Mit

$$\mathcal{B}_0:=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}\big(\gamma_0(t)\big),\mathrm{Im}(z)>\mathrm{Im}\big(\gamma_0(t)\big)\}\quad \text{für } t\ge t_0$$

gilt dann nämlich

$$\mathcal{B}_0\cap\bigcap_{\sigma=1}^{n-1}\gamma_\sigma=\emptyset.$$

Definiert man den Polygonzug für γ_0 in der oben beschriebenen Weise bis zu einem Punkt $\gamma_0(t_0^*)$ mit $t_0^*\ge t_0$, so kann man γ_0 von $\gamma_0(t_0^*)$ aus durch eine senkrechte Strecke bis zur Höhe $\eta+n$ und von dort aus durch einen Strahl parallel zur reellen Achse nach ∞ darzustellen.

Für die anderen Beine geht man ganz analog vor. Also: Für $j=1,\dots,n-1$ existiert ein $t_j\in[0,1]$, so daß für $t\ge t_j$

$$\mathrm{Re}\big(\gamma_j(t)\big)>\mathrm{Re}\big(\gamma_{j-1}(t_{j-1}^*)\big)$$

und mit

$$\mathcal{B}_j:=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}\big(\gamma_j(t)\big),\eta>\mathrm{Im}(z)>\mathrm{Im}\big(\gamma_j(t)\big)\}\quad \text{für } t\ge t_j$$

$$\mathcal{B}_j\cap\bigcap_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\ne j}}^{n-1}\gamma_\sigma=\emptyset$$

gilt. Dann kann man den Streckenzug für γ_j bis zu einem Punkt $\gamma_j(t_j^*)$ mit $t_j^*\ge t_j$ konstruieren und von dort aus senkrecht nach oben bis zur Höhe $\eta+n-j$ und dann parallel zur reellen Achse bis nach Unendlich gehen. $\square$

Dieses Lemma erleichtert den Umgang mit Spinnen beträchtlich: Die ursprüngliche Definition verlangt ja nur Stetigkeit der Spinnenbeine, so daß beispielsweise der Begriff der Länge eines Teilstückes eines Beines einer Spinne nicht allgemein definiert ist. Aber nun wissen wir, daß zu jeder Spinne eine äquivalente Spinne existiert, deren Beine stückweise C^∞–Kurven sind.

Der Beweis des Lemmas hat folgende Aussage gleich mitgezeigt:

(A.2) Lemma.

Für jede Spinne existiert eine äquivalente Spinne, so daß es um jeden Endpunkt z_ϱ

für $\varrho \in \{0, \dots, n-1\}$, *eine kreisförmige Umgebung* $K(z_\varrho)$ *gibt, innerhalb derer nur das Bein* γ_ϱ *verläuft, nicht aber die anderen Beine* γ_σ *mit* $\sigma \neq \varrho$. *Dabei kann* γ_σ *in* $K(z_\sigma)$ *durch eine radiale Strecke dargestellt werden.* $\square$

Bemerkung. Diese Überlegungen sollen klarmachen, daß Spinnen so gewählt werden können, daß sie sehr angenehme Eigenschaften besitzen. Es handelt sich also nicht um „wilde Tiere“, sondern um zahme und berechenbare Objekte – letzteres im wörtlichen Sinn, denn die obige Beschreibung bietet sich zur Umsetzung in ein Computerprogramm an.

Anhang B. Ein Spinnenprogramm

In [HS94] und [SS] wird, wie schon erwähnt, ein Problem beschrieben, das zum hier behandelten Themenkreis in gewisser Weise invers ist: Zu einer gegebenen kombinatorischen Information (dem sogenannten externen Winkel bzw. der externen Adresse) soll eine Funktion $P_{\lambda,d}$ bzw. E_λ gefunden werden, deren singulärer Orbit die gegebene Kombinatorik besitzt. Eine Implementierung dieses Verfahres wird hier vorgestellt; sie geht zurück auf ein früheres Programm von Dierk Schleicher.

Dieser Abschnitt illustriert, wie die Ergebnisse aus Anhang A benutzt werden können, um Computerprogramme für Spinnen zu schreiben: Zunächst läßt die Definition von Spinnen nicht vermuten, daß sich Algorithmen für Spinnen leicht in ein Computerprogramm umsetzen lassen — in der Definition ist von Kurven die Rede; da die Implementierung stetiger Funktionen a priori ein kompliziertes und schwieriges Unterfangen ist, ist zunächst nicht klar, wie sich Spinnenalgorithmen effizient programmieren lassen. Doch in Abschnitt 9 von [HS94] werden Hinweise zur Implementierung gegeben. Dabei wird ausgenützt, daß jede Spinne äquivalent zu einer Spinne aus Streckenzügen ist. Diese Behauptung haben wir in in Anhang A bewiesen.

Was wird berechnet? Konstruiert wird eine Fixspinne, deren Endpunkte eine bestimmte, vom Benutzer eingegebene Kombinatorik (eben den externen Winkel bzw. die externe Adresse) besitzt. Dieses Verfahren ist für Polynome der Art $z \mapsto \lambda(1+z/d)^d$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ und $d \in \mathbb{N}^*$ ausführlich in [HS94] beschrieben; für die Exponentialfamilie $\mathcal{E}$ siehe [SS]. Zu beachten ist, daß die dort anzufindenden Definitionen, die wir in diesem Anhang benützen wollen, sich von denen aus §3 leicht unterscheiden. Im folgenden soll eher eine Intuition vermittelt werden, statt rigorose Definitionen zu geben — für eine präzise Behandlung dieses Themas wird auf die oben zitierten Arbeiten verwiesen.

Nach wie vor ist eine Spinne eine Kollektion injektiver Kurven, die sich nur in ∞ (dem „Körper“ der Spinne) treffen; allerdings wird nicht verlangt, daß die Beine an Punktes des singulären Orbits einer Funktion E_λ enden — denn die ist ja nicht bekannt, sondern gesucht.

Zu beachten ist auch, daß die Beine einer Spinne hier und im Programm von 1 bis n statt von 0 bis $n-1$ numeriert sind.

Grob gesagt geschieht folgendes: Gestartet wird mit einer Spinne, deren „erstes“ Bein γ_1 am Punkt 0 endet. Abgesehen von dieser Bedingung kann die Spinne (fast) frei gewählt werden: Nur die Gesamtzahl der Beine wird durch den externen Winkel bestimmt. Die gegebene Spinne definiert eine Funktion E_λ, indem $\lambda := \gamma_2(0)$ gesetzt wird. Die Urbilder des Beines γ_1 partitionieren die dynamische Ebene; der Sektor, der den singulären Wert enthält, wird wieder mit 0 numeriert. Bestimmt der externe Winkel den Sektor, in dem das Inverse eines Beines unter E_λ liegen soll, wird in kanonischer Weise eine Spinnenabbildung definiert. Das Bild der gegebenen Spinne unter dieser Spinnenabbildung ist wieder eine Spinne, deren Bein $\tilde{\gamma}_1$ am Punkt 0 endet. Also kann das Verfahren iteriert werden. In den oben erwähnten Arbeiten wird (unter bestimmten Voraussetzungen) die Konvergenz gegen eine Fixspinne gezeigt. Das bedeutet insbesondere: Die Endpunkte dieser Spinne sind unter der Spinnenabbildung invariant. Also existiert eine Funktion E_λ, deren singulärer Orbit genau durch Endpunkte der Fixspinne definiert ist; diese Endpunkte sind durch den externe Winkel definiert. Gefunden ist also eine Funktion E_λ, deren singulärer Orbit die gegebene kombinatorische Information erfüllt. Testet man diesen Algorithmus, so zeigt sich, daß die Folge der Spinnen in der Regel auffallend schnell in einer geeigneten Metrik des Spinnenraumes konvergiert. Dabei wird die Konvergenz der Endpunkte in $\mathbb{C}^n$ betrachtet und nach genügend langer Iteration liegen die Beine zweier Spinnen der Iterationsfolge in der „gleichen“ Homotopieklasse (damit ist gemeint, daß es eine kanonische Zuordnung der Endpunkte gibt; die Verbindung der zugehörigen Endpunkte durch ein Geradenstück ermöglicht die Definition von Homotopie).

Es ist möglich, daß im Grenzwert Endpunkte zusammenfallen. Dann landen mehrere Strahlen am gleichen Punkt — dies ist der interessante Fall aus §5.

Literaturverzeichnis

[DGH86] DEVANEY, R., L. GOLDBERG und J. HUBBARD: *A dynamical approximation to the exponential map by polynomials.* M.S.R.I Preprint, 1986.

[DK84] DEVANEY, R. und M. KRYCH: *Dynamics of* $\exp(z)$. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 4:35–52, 1984.

[EL84] EREMENKO, A. und M. LYUBICH: *Iterates of entire functions.* Soviet Mathematics Doklady, 30:592–594, 1984.

[Fat26] FATOU, P.: *Sur l'itération des fonctions transcendantes entières.* Acta Mathematica, 47:337–370, 1926.

[GK86] GOLDBERG, L. und L. KEEN: *A finiteness theorem for a dynamical class of entire functions.* Ergodic Theory and Dynamical Systems, 6:183–192, 1986.

[HS94] HUBBARD, J. und D. SCHLEICHER: *The spider algorithm.* In: DEVANEY, R. (Herausgeber): *Complex Dynamical Systems*, Seiten 155–180. American Mathematical Society, 1994.

[Hub93] HUBBARD, J.: *Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: Three theorems of J.-C. Yoccoz.* In: *Topological methods in modern mathematics*, Seiten 467–511. Publish or Perish, Houston, 1993.

[Mil90] MILNOR, J.: *Dynamics in one complex variable: Introductory lectures.* IMS Stony Brook Preprint #1990/5, 1990.

[Mis81] MISIUREWICZ, M.: *On iterates of* e^z. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1:103–106, 1981.

[Sch97] SCHLEICHER, D.: *The dynamics of iterated polynomials.* Vorlesungsskript TU München, 1997.

[SS] SCHLEICHER, D. und M. SHISHIKURA: *Topology and combinatorics of postsingularly finite exponential maps.* In Vorbereitung.

[Sul85] SULLIVAN, D.: *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I.* Annals of Mathematics, 122:401–418, 1985.